



सत्यमेव जयते

**INDIAN AGRICULTURAL
RESEARCH INSTITUTE, NEW DELHI**

I.A.R.I.

GIP NLK—H-3 I.A.R.I.—10-5-55—15,000

臺北帝國大學理農學部紀要

第十八卷 第一號

昭和十一年五月

281

Vol 18-20

MEMOIRS
OF THE
FACULTY OF SCIENCE
AND
AGRICULTURE

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

Vol. XVIII, No. 1-10 & 13

MAY, 1936



MATUMURA, Sôzi :

On a Pair of Surfaces Mutually Related (III), (VI).

PUBLISHED

BY THE

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

FORMOSA, JAPAN

315750



IARI

PUBLICATION COMMITTEE

Professor **Jinshin YAMANE**, Dean of the Faculty (*ex officio*)

Professor **Ichirô HAYASAKA**

Professor **Tyôzaburo TANAKA**

The MEMOIRS OF THE FACULTY OF SCIENCE AND AGRICULTURE, Taihoku Imperial University, are published occasionally by the University, which exchanges them with the publications of other learned bodies and institutions throughout the world. Separate series will be sent to individual research institutions, and complete series to the central libraries of universities and larger institutions. Copies of the Memoirs may also be obtained from MARUZEN COMPANY LTD., Tôkyô, Japan, and THE TAIWAN NICHI-NICHI SHIMPÔ-SHA, Taihoku, Formosa, Japan.

All communications regarding the Memoirs should be addressed to the Dean of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imperial University, Taihoku, Formosa, Japan.

臺北帝國大學理農學部紀要

第十八卷

昭和十一年—昭和十二年

MEMOIRS
OF THE
FACULTY OF SCIENCE
AND
AGRICULTURE
TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

Volume XVIII.

1936-1937

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY
FORMOSA, JAPAN

CONTENTS

	<i>Page.</i>
ARAKATSU, B. KIMURA, K. and UEMURA. Y.:—Experimental Studies on the Artificial Transmutation of Certain Light Elements Bombarded by Ions of Hydrogen and Heavy Hydrogen. I.	75
MATSUMURA, Sôji:—On a Pair of Surfaces Mutually Related (III), (IV).	1
MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (XVI): Über Eiliniën und Eiflächen.	21
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XVI).	53
MATSUMURA, Sôji:—On a Pair of Surfaces Mutually Related, (V). ...	95
MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (XVII).	133
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XVII).	149
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XVIII)... ..	185
MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (VII).	201
MATSUMURA, Sôji:—On a Pair of Surfaces Mutually Related, (VI). ...	203
MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (XVIII).	215
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XIX).	229
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XX).	241
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXI).	257
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXII).	275
OGASAHARA. Kazuo:—The Effect of Temperature and Water Vapour on Diffusion-Coefficients of Ions in Air.	167

ON A PAIR OF SURFACES MUTUALLY RELATED (III)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, March 1, 1936.)

1. Let S and \bar{S} be two surfaces in one-to-one point correspondence such that the tangent planes to the two surfaces at corresponding points, P and \bar{P} , are not parallel. If there exist two families of curves, one on each surface, which have the property that they correspond and have parallel tangents at corresponding points, the surfaces are said to correspond by a semi-parallel map. We propose to discuss the case in which the curves corresponding by parallel tangents are lines of curvature on the surfaces, and the lines of curvature on the two surfaces correspond.

Let the two surfaces be represented parametrically so that corresponding points have the same curvilinear coördinates; i. e.,

$$(1) \quad \begin{cases} S : x = x(u, v), \\ \bar{S} : \bar{x} = \bar{x}(u, v). \end{cases}$$

The families of lines of curvature, one on each surface, which correspond by parallel tangents shall be the u -curves; the other families of the lines of curvature shall be the v -curves.

Since the lines of curvature of a surface form a conjugate system, we must have

$$(2) \quad x_u = aU, \quad \bar{x}_u = \bar{a}U,$$

where U represents a triple of functions u alone.

For the same reason, we have $f=0$; and as the lines of curvature form an orthogonal system, we have $F=0$.

Now the point equation of the lines of curvature of S is

$$(3) \quad \theta_{uv} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \theta_u + \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \theta_v.$$

2. When the surface S is the central one of the other surface, then (3) can be put in the form⁽¹⁾

$$(4) \quad \theta_{uv} = -\frac{\sigma}{\lambda} \theta_u - \frac{1}{\lambda} \theta_v.$$

From (3), (4) we get

$$(5) \quad \begin{cases} -\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}, \\ -\frac{1}{\lambda} = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \end{cases}.$$

from which we have

$$(6) \quad \lambda = -\frac{1}{\frac{\partial \log \sqrt{G(v)}}{\partial u}},$$

$$(7) \quad \sigma = \frac{\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}}{\frac{\partial \log \sqrt{G(v)}}{\partial u}},$$

where G must be a function of v alone, and S are a surface of MONGE or molding surface, so we have

$$(8) \quad \frac{1}{\lambda} = 0, \quad \frac{1}{\sigma} = 0, \quad -\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}.$$

3. On the other hand the condition that the point equation S may have equal invariants is⁽²⁾

$$(9) \quad \frac{\partial \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)}{\partial u} = \frac{\partial \left(\frac{1}{\lambda} \right)}{\partial v}.$$

-
- (1) SLOTNIK, M. M.: Semi-parallel transformations of lines of curvature, *Ann. of Math.*, 30 (1929), p. 188.
 (2) MATSUMURA, S.: On a pair of surfaces mutually related, *Tôhoku Math. Journ.* 39 (1934), p. 21.

In this case from (9) follows

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial u \partial v} = 0,$$

i. e. (10) $E = U + V,$

where U, V are functions of u and v respectively.

From (10) we get the

Theorem : *The condition that the point equation of our surface may have equal invariants is (10).*

4. In this case the point equation⁽³⁾ of N_{-1} and N_1 become

$$(11) \quad \theta_{-1} = \theta_u,$$

$$(12) \quad \theta_1 = \theta_v - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \theta, \quad \left(\theta_k = -\frac{\partial \theta}{\partial k} \right),$$

respectively.

From (11) and (12) we get

$$(13) \quad (\theta_1 \theta_{-1}) = (\theta_u \theta_v) - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} (\theta \theta_u).$$

When the surface S is a sphere, then we can put

$$(14) \quad (\theta \theta_u) = 0,$$

so from (13) and (14) we have

$$(15) \quad (\theta_1 \theta_{-1}) = 0,$$

because without loss of generality we can put

$$(16) \quad (\theta_u \theta_v) = 0.$$

From (15) we get the

Theorem : *When the surface S is a sphere, then N_{-1} and N_1 cut one another orthogonally.*

5. From (12) we get the relation

(3) EISENHART, L. P.: Transformations of Surfaces, Princeton (1923) p. 81.

$$(17) \quad (\theta_1 \theta_1) = (\theta_v \theta_v) - 2 \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} (\theta \theta_v) \\ + \left\{ \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \right\}^2 (\theta \theta).$$

When S is a sphere, so from (17) follows

$$(18) \quad (\theta_1 \theta_1) = G + \left\{ \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \right\}^2,$$

so we have

Theorem: *When S is a sphere and the locus of N_1 is also a sphere, then follows*

$$(19) \quad 1 = G + \left\{ \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \right\}^2.$$

6. Next we consider a radial transformation, or, more explicitly, as the radial transformation determined by λ .

In order that the transformations⁽⁴⁾

$$(20) \quad x' = \frac{x}{\lambda}, \quad y' = \frac{y}{\lambda}, \quad z' = \frac{z}{\lambda},$$

where λ is a function of u and v , transform a conjugate system S whose coördinates are x, y, z , into another conjugate system S' , it is necessary and sufficient that x, y, z, λ be four solutions of the same LAPLACE equation:

$$x_{uv} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} x_u.$$

The coördinates x', y', z' of S' will then satisfy the equation

$$(21) \quad (\theta')_{uv} = \left\{ \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} \right\} (\theta')_u - \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} (\theta')_v.$$

The equation (21) shows that all the radial transforms of S will have equal invariants when and only when S itself has equal invariants.

(4) STETSON, J. M.: Conjugate System of curves, Ann. of Math. 19 (1917-18) p. 110.

7. Let us find the LAPLACE transform of S' , defined by (20).

The coördinates of N_1 are given by equation of the form (12).

The coördinates of N'_1 , the LAPLACE transform of S' , are given by equations of the form

$$(22) \quad x'_1 = x' - \frac{1}{\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda} \frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{x_1}{\lambda_1},$$

where

$$(23) \quad \lambda_1 = \lambda - \left\{ \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \right\}^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Observe that λ_1 is the LAPLACE transform of λ , as x_1 is of x .

We therefore have

$$(24) \quad x'_1 = \frac{x_1}{\lambda_1}, \quad y'_1 = \frac{y_1}{\lambda_1}, \quad z'_1 = \frac{z_1}{\lambda_1}.$$

Similarly

$$(25) \quad x'_{-1} = \frac{x_{-1}}{\lambda_{-1}}, \quad y'_{-1} = \frac{y_{-1}}{\lambda_{-1}}, \quad z'_{-1} = \frac{z_{-1}}{\lambda_{-1}}.$$

8. The congruences of RIBAUCAUR may be defined as those for which the developables meet the mean surface

$$(26) \quad x_{uv} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} x_u$$

of the congruence in a conjugate system.

From the above discussion it is clear that the ruled surfaces $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ are the developables, and consequently, it follows from (21) that the necessary and sufficient condition that the tangents to the curves $v = \text{const.}$ on S form a congruence of RIBAUCAUR is that the function E satisfy the condition

$$(27) \quad \frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial u \partial v} = 0.$$

When $E = U + V$, it also must be constant by (27).

In a similar manner we find that for the tangents to the curves $u=\text{const.}$ to form a congruence of this kind, it is necessary and sufficient that⁽⁵⁾

$$(28) \quad \frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log \left\{ -\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \right\}}{\partial u \partial v} = 0$$

When the condition (27) is satisfied, the point equation of the mean surface becomes

$$(29) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0.$$

(5) I. c. (2) p. 19.

ON A PAIR OF SURFACES MUTUALLY RELATED, (IV)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication March 1, 1936.)

1. Consider a surface S referred to any conjugate system of lines $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$; then the rectangular coordinates x , y , z of its points are particular integrals of LAPLACE's equation of the form

$$(1) \quad -\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{\sigma}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

where

$$\sigma = \frac{GE_v - FG_u}{EG_u - FE_v}, \quad \frac{1}{2} \lambda = \frac{EG - F^2}{E_v F - G_u E},$$

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2,$$

ds being the linear element.⁽¹⁾

The necessary and sufficient condition that

$$v = \text{const.}$$

is the curve of the enveloping cylinder of S or the curve of contact of the enveloping cone is⁽²⁾

$$(2) \quad \sigma/\lambda = 0,$$

or

$$(3) \quad \frac{\sigma}{\lambda^2} = \frac{\partial(\sigma/\lambda)}{\partial u}.$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Vol. XVIII, No. 1, 1936.]

- (1) S. NAKAJIMA: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, Tôhoku Math. Journ. vol. 30, 1928, p. 142.

S. MATSUMURA: On a pair of Surfaces Mutually related, Tôhoku Math. Journ. vol. 39, 1934, p. 17.

- (2) T. KUBOTA: Differential Geometry (II) Iwanami Koza, Tôkyo, 1932, p. 90.

When $\lambda \neq 0$, then from (2) follows (4) $\sigma = 0$ and from (3) follows

$$(5) \quad \sigma + \sigma \lambda_u = \lambda \sigma_u.$$

When the point equation is

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + U_1 V_1' \frac{\partial \theta}{\partial u} + U_1' V_1 \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

then the tangents to each system of parametric curves on the surface S form congruences of RIBAUCOUR, where U_1 and V_1 are functions of u and v respectively, and the accents indicate differentiation.⁽³⁾

From (1), (6) follows

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma/\lambda = U_1 V_1', \\ 1/\lambda = U_1' V_1. \end{cases}$$

$$\text{i. e.} \quad (8) \quad \begin{cases} \lambda = 1/U_1' V_1, \\ \sigma = \frac{d}{dv} (\log V_1) / \frac{d}{du} (\log U_1). \end{cases}$$

When in

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{\sigma}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0, \quad \theta = x, y, z,$$

$$(10) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = f(u, v) U_1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = f(u, v) U_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f(u, v) U_3,$$

then

$$(11) \quad \begin{cases} x = \int U_1 f(u, v) du + V_1, \\ y = \int U_2 f(u, v) du + V_2, \\ z = \int U_3 f(u, v) du + V_3, \end{cases}$$

where U_i are functions of u alone and V_i functions of v alone.

(3) L. P. EISENHART: A treatise on the differential Geometry of Curves and Surfaces, p. 424.

From the above fact follows the

Theorem : *When the direction cosines of the tangent to the curve $v=\text{const.}$ on S are proportional to $U_1:U_2:U_3$ then the equation of S is (3).*

2. The equations

$$(12) \quad \begin{cases} X=x-\lambda \frac{dx}{\partial u}, \\ Y=y-\lambda \frac{\partial y}{\partial u}, \\ Z=z-\lambda \frac{\partial z}{\partial u}, \end{cases}$$

are the equations of the locus \bar{S} of the apices of the family of circumscribed cone of S .

From (12) we have

$$(13) \quad \sum X^2 = \sum x^2 + \lambda^2 \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 - 2\lambda \sum x \frac{\partial x}{\partial u}.$$

when in (13)

$$(14) \quad \sum x^2 = 1, \quad \sum X^2 = 1,$$

then we have

$$(15) \quad 1 = 1 + \lambda^2 E,$$

or

$$(16) \quad \lambda^2 E = 0.$$

So follows the

Theorem : *When S and \bar{S} are spheres then we have the relation (16).*

Next we consider the first LAPLACE transform S_1 of S , whose co-ordinates are

$$(17) \quad \begin{cases} x_1 = x + \frac{\lambda}{\sigma} \frac{dx}{\partial u}, \\ y_1 = y + \frac{\lambda}{\sigma} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ z_1 = z + \frac{\lambda}{\sigma} \frac{\partial z}{\partial u}. \end{cases}$$

From (17) we have

$$(18) \quad \sum x_1^2 = \sum x^2 + \frac{\lambda^2}{\sigma^2} E + 2 \frac{\lambda}{\sigma} \sum x \frac{\partial x}{\partial u}.$$

When

$$\sum x_1^2 = \sum x^2 = 1,$$

then from (18) we get

$$(19) \quad \frac{\lambda^2 E}{\sigma^2} = 0.$$

So we have the

Theorem : *When first LAPLACE transforms S_1 and S are spheres, then we have the relation (19).*

In order that the radial transformation

$$(20) \quad x' = \frac{x}{\lambda}, \quad y' = \frac{y}{\lambda}, \quad z' = \frac{z}{\lambda},$$

where λ is a function of u and v , transform a conjugate system S whose coördinates are x, y, z into another conjugate system S' , it is necessary and sufficient that x, y, z, λ be four solutions of the same LAPLACE equation (I).

The coördinates x', y', z' of S' will then satisfy the equation

$$(21) \quad \frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} = - \left(\frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda \right) \frac{\partial \theta'}{\partial u} \\ - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial u} \log \lambda \right) \frac{\partial \theta'}{\partial v}.$$

When we apply the radial transformation

$$x^{(n)} = x/\lambda^n, \quad y^{(n)} = y/\lambda^n, \quad z^{(n)} = z/\lambda^n,$$

then the coördinates $x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}$ of $S^{(n)}$ will satisfy the equation

$$(22) \quad \frac{\partial^2 \theta^{(n)}}{\partial u \partial v} = - \left(\frac{\sigma}{\lambda} + n \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda \right) \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial u} - \left(\frac{1}{\lambda} + n \frac{\partial}{\partial u} \log \lambda \right) \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial v}.$$

The coördinates of $S_1^{(n)}$, the LAPLACE transform of $S^{(n)}$, are given by equations of the form

$$x_1^{(n)} = x^{(n)} - \frac{1}{\frac{\sigma}{\lambda} - n \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda} \cdot \frac{\partial x^{(n)}}{\partial v}.$$

3. Suppose that the coördinates x, y, z of a surface S are solutions of an equation of the form⁽¹⁾

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \frac{\sigma}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

and let us consider a suite of surfaces⁽²⁾

$$(23) \quad \dots S_{-2}, S_{-1}, S, S_1, S_2, \dots$$

In order that S_1 be a curve, x_1, y_1, z_1 must be functions of u alone so that we get

$$(24) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{1}{\lambda} \right) = \sigma,$$

or

$$(25) \quad \lambda^2 \sigma + \lambda_v = 0.$$

In like manner the condition that S_{-1} be a curve is

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(-\frac{\lambda}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma},$$

(1) S. MATSUMURA: On a Pair of Surfaces Mutually Related, Tôhoku Math. Journ. vol. 39, p. 17.

(2) L. P. EISENHART: A treatise on the differential Geometry of Curves and Surfaces p. 404.

or

$$(27) \quad \sigma_u \lambda = (\lambda_u - 1) \sigma,$$

where

$$(28) \quad \sigma = \frac{GE_v - FG_u}{EG_u - FE_v}, \quad \frac{1}{2} \lambda = \frac{EG - F^2}{E_r F - G_u E}.$$

When μ is one solution of (1) then by STETSON⁽³⁾ we get

$$(29) \quad \mu_1 = \mu + \frac{\lambda}{\sigma} \frac{\partial \mu}{\partial v},$$

where μ_1 satisfies S_1 .

From (I), (29) we have

$$(30) \quad \mu_{uv} = \frac{\mu_v}{\mu - \mu_1} \mu_u - \frac{1}{\lambda} \mu_v.$$

Similarly we have

$$(31) \quad \mu_{uv} = \frac{\lambda_v}{\lambda - \lambda_1} \mu_u - \frac{1}{\lambda} \mu_v$$

where

$$\lambda_1 = \lambda + \frac{\lambda}{\sigma} \lambda_v,$$

$$(32) \quad \mu_{uv} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v}, \quad \mu_u = \frac{\partial \mu}{\partial u}, \quad \dots$$

When in the point equation of a surface (I)

$$(33) \quad \frac{\sigma}{\lambda} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{\lambda} = 0$$

the coördinates of the surface can be found by quadratures.

When, for the surface S , we have another surface S_0 whose coördinates x_0, y_0, z_0 satisfy the relations

$$(34) \quad \frac{dx_0}{\partial u} = k \frac{dx}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = -k \frac{\partial x}{\partial v},$$

(3) J. M. STETSON: Conjugate system of curves, *Annals of Mathematics* 19 (1917-18) p. 110.

then from (34) we get

$$(35) \quad 2k \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + k_v \frac{\partial u}{\partial u} + k_u \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Comparing (I) and (35) we have

$$(36) \quad \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{k_v}{2k}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{k_u}{2k},$$

so we get

$$k = e^{2 \int \frac{\sigma}{\lambda} dv} = e^{2 \int \frac{1}{\lambda} du}.$$

When in (I)

$$\frac{\sigma}{\lambda} = -\frac{a}{u-v}, \quad \frac{1}{\lambda} = -\frac{b}{u-b}$$

or

$$\sigma = -\frac{a}{b}, \quad \lambda = -\frac{u-v}{b}$$

then

$$x = (u+m)^{-b} (v+m)^{-a},$$

$$y = (u+m)^{-b} (v+m)^{-a},$$

$$z = (u+m)^{-b} (v+m)^{-a},$$

where a, b, m are constants.

4. If S is the first focal sheet of a congruence, the second sheet S_1 is given by

$$(37) \quad x_1 = x + \frac{\lambda}{\sigma} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad y_1 = y + \frac{\lambda}{\sigma} \frac{\partial y}{\partial v},$$

$$z_1 = z + \frac{\lambda}{\sigma} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

When p is the affine distance from a point x on S to a point x_1 , then

$$(38) \quad p = \frac{(x_u, x_v, x_1 - x)}{|LN - M^2|^{\frac{1}{2}}} = \frac{(x_u, x_v, \frac{\lambda}{\sigma} x_v)}{|LN - M^2|^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Also the affine distance from a point ξ_1 on S_1 to a point ξ is

$$(39) \quad \frac{\{(\xi_1)_u, (\xi_1)_v, \xi - \xi_1\}}{|L_1 N_1 - M_1^2|^{\frac{1}{2}}}} \\ = \frac{\{\xi_u + (\frac{\lambda}{\sigma})_u \xi_v + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_{uv}, \xi_v + (\frac{\lambda}{\sigma})_v \xi_u + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_{uv}, -\frac{\lambda}{\sigma} \xi_{uv}\}}{|L_1 N_1 - M_1^2|^{\frac{1}{2}}}.$$

When we transform S by $\xi' = \xi/\lambda$ to the surface S' , then the affine distance from ξ' to a point S is

$$(40) \quad \frac{(\xi_u, \xi_v, \xi/\lambda - \xi)}{|LN - M^2|^{\frac{1}{2}}} = \frac{\xi(\xi_u, \xi_v, 1 - \lambda)}{\lambda |LN - M^2|^{\frac{1}{2}}},$$

where λ is the function of u and v .

5. When we apply the radial transformation

$$\xi' = \frac{\xi_1}{\mu}$$

after we transform (37) on the surface S , then we get

$$(41) \quad \xi' = \frac{\xi}{\mu} - \frac{\lambda}{\sigma\mu} \frac{\partial \xi}{\partial v},$$

$$\text{i. e.} \quad \xi'^2 = \frac{\xi^2}{\mu^2} + \frac{\lambda^2}{\sigma^2 \mu^2} \xi_v^2 - \frac{2\lambda}{\mu^2 \sigma} \xi \xi_v.$$

When

$$(42) \quad \xi^2 = \xi'^2 = 1,$$

then

$$(43) \quad \mu = \pm \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2 G} / \sigma,$$

so we get the

Theorem : *In order that we get a sphere after we apply the radial transformation and (37) on the sphere then (43) must hold.*

We take

$$(44) \quad \xi_1 = \xi + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_v,$$

and

$$(45) \quad x_{-1} = x + \lambda x_u,$$

where

$$x_v = -\frac{\partial x}{\partial v}.$$

When the inverse of x_1 with respect to the sphere ξ is x_{-1} , then follows

$$(46) \quad x + \lambda x_u = -2 \left(x + \frac{\gamma}{\sigma} x_v, \xi \right) \xi + x + \frac{\lambda}{\sigma} x_v,$$

$$\text{i. e.} \quad \lambda x_u = -2 \left(x + \frac{\lambda}{\sigma} x_v, \xi \right) \xi + \frac{\lambda}{\sigma} x_v.$$

This is the condition that the inverse of x_1 with respect to the sphere ξ is x_{-1} .

When x_1 and x_{-1} is perpendicular and x is a sphere, then

$$(47) \quad x_1 x_{-1} = x x + \frac{\lambda}{\sigma} x x_v + \lambda x x_u + \frac{\lambda}{\sigma} x_u x_v = 0,$$

$$\text{i. e.} \quad (48) \quad 1 + \frac{\lambda}{\sigma} F = 0,$$

where E, F, G are the first fundamental quantities of S, so follows the

Theorem : *When x_1 and x_{-1} is perpendicular and S is a sphere, then follows (48).*

6. The coordinates x', y', z' in a radial transformation

$$(49) \quad x' = \frac{x}{\mu}, \quad y' = \frac{y}{\mu}, \quad z' = \frac{z}{\mu}$$

will satisfy⁽¹⁾ the equation

$$(50) \quad \frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} = \left(-\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial v} \log \mu \right) \frac{\partial \theta'}{\partial u} \\ + \left(-\frac{1}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial u} \log \mu \right) \frac{\partial \theta'}{\partial v},$$

(1) STETSON: Conjugate systems of curves on a surface both of whose Laplace transforms are lines of curvature, Ann. of Math. vol. 19, p. 108.

where μ is a function of u and v .

When the tangents to each system of parametric curves on a surface θ' form congruences of RIBAUCCOUR⁽²⁾, then

$$(51) \quad \begin{cases} \frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v} \log \mu = U_1 V_1', \\ \frac{1}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial u} \log \mu = U_1' V_1, \end{cases}$$

where U_1 and V_1 are functions of u and v respectively, and the accents indicate differentiation.

From (51) we have

$$(52) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(U_1 V_1' - \frac{\sigma}{\lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(U_1' V_1 - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\text{i. e.} \quad (53) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

or

$$(54) \quad \sigma_u \lambda + \lambda_v = \lambda_u \sigma, \quad (\lambda \neq 0).$$

So we have the

Theorem : *When the tangents to each system of parametric curves on a surface θ form congruences of RIBAUCCOUR, then we have (54).*

7. We take now the radial transformation

$$(55) \quad x' = \frac{x}{\mu}, \quad y' = \frac{y}{\mu}, \quad z' = \frac{z}{\mu},$$

then the coördinates x' , y' , z' of S' will satisfy the equation

$$(56) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial u \partial v} = & \left(-\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial v} \log \mu \right) \frac{\partial \theta'}{\partial u} \\ & + \left(-\frac{1}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial u} \log \mu \right) \frac{\partial \theta'}{\partial v}. \end{aligned}$$

(2) EISENHART: A treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, 1909, p. 424.

In order that the curve $v=\text{const.}$ is the touching curve of the enveloping cylinder or cone it is necessary and sufficient that⁽¹⁾

$$(57) \quad -\frac{\sigma}{\lambda} = -\frac{\partial}{\partial v} \log \mu,$$

or

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v} \log \mu \right) \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial u} \log \mu \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(-\frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v} \log \mu \right). \end{aligned}$$

8. We take the surface

$$(58) \quad \xi' = \frac{\xi}{\mu}$$

and

$$(59) \quad \xi_1 = \xi + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_v.$$

When $\xi^2=1$ and $\xi' \xi_1=0$, then

$$(60) \quad \xi \xi_1 = \frac{\xi^2}{\mu} = -\frac{\lambda}{\sigma \mu} \xi \xi_v = \frac{1}{\mu^2},$$

So follows the

Theorem: *When the surface ξ' and ξ_1 are perpendicular and ξ is a sphere then the angle α between ξ , ξ' is*

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\mu}.$$

9. We take here inversion η of the surface ξ' with respect to the sphere ξ , then.

$$\eta = -2 (\xi' \xi) \xi + \xi,$$

$$\text{i. e.} \quad (61) \quad \eta = -2 \left(\frac{\xi}{\mu} \cdot \xi \right) \xi + \frac{\xi}{\mu},$$

where

(1) T. KUBOTA: Differential Geo. (II) Iwanami Koza, Tôkyo, 1932, p. 90.

$$(62) \quad \xi' = \frac{\xi}{\mu},$$

ξ is the surface S.

Next we take two transformations

$$(63) \quad \xi_1 = \xi + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_v,$$

$$(64) \quad \xi_{-1} = \xi + \lambda - \xi_u.$$

If we consider (63), (64) then we get

$$\begin{aligned} (65) \quad \xi_1 &= \xi_{-1} + \frac{\lambda}{\sigma} (\xi_{-1})_v = \{\xi + \lambda \xi_u\} + \frac{\lambda}{\sigma} \{\xi + \lambda \xi_u\}_v \\ &= \xi + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_v + \left(\frac{\lambda \lambda_v}{\sigma} + \lambda \right) \xi_u + \frac{\lambda^2}{\sigma} \xi_{uv}. \end{aligned}$$

When $\xi_1 \equiv \xi$ in (65), then from (65) we obtain

$$(66) \quad \xi_{uv} = -\left(\frac{\lambda_v}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda} \right) \xi_u - \frac{1}{\lambda} \xi_v.$$

The necessary and sufficient condition that the curve

$$v = \text{const.}$$

is the curve of contact of the enveloping cylinder or cone of ξ is

$$\lambda_v + \sigma = 0,$$

or

$$\lambda_v + \sigma = \lambda_{uv} \lambda + \sigma_u \lambda - \lambda_u \lambda_v - \lambda_u \sigma.$$

So we get the

Theorem : *The necessary and sufficient condition that the curve*

$$v = \text{const.}$$

is the curve of contact of the enveloping cylinder or cone of ξ is

$$\lambda_v + \sigma = 0$$

or

$$\lambda_v + \sigma = \lambda_{uv} \lambda + \sigma_u \lambda - \lambda_u \lambda_v - \lambda_u \sigma,$$

when x is invariant under the transformation combined by two transformations (63), (64).

ERRATA

On a Pair of Surfaces Mutually Related. II

Page 310, lines 14, replace from by form.

Page 340, lines 6 and 12, replace Without by except, replace is by are.

ÜBER FLÄCHEN UND KURVEN (XVI)

Über Eilinen und Eiflächen

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, March 1, 1936.)

(1)

Im folgenden mögen wir einen elementargeometrischen Satz von B. SEGRE mitteilen.

1. B. SEGRE hat im Band XIII (1934) der Bollettinodell' Unione Mathematica Italiana (Nr. 5) den folgenden Satz bewiesen: *Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist nie kleiner als die Summe der orthogonalen Projektionen der zwei Katheten auf einer beliebigen Geraden g.*

Die Gleichheit besteht nur, wenn g parallel zur Hypotenuse oder zur zweiten Diagonale des aus den Katheten gebildeten Rechtecks ist.

Für diesen Satz will ich zunächst einen sehr kurzen Beweis mit Hilfe der Vektorrechnung geben und danach zwei räumliche Erweiterungen besprechen.

2. Es seien α , β zwei von der Spitze 0-des rechtwinkligen Dreiecks als Ursprung ausgehende Kathetenvektoren.

Dann ist

$$(1) \quad \alpha\beta=0.$$

Ferner sei g ein Einheitsvektor der Geraden g . Dann lautet die obige Behauptung:

$$(2) \quad |g \cdot \alpha| + |g \cdot \beta| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Die linke Seite hiervon ist nun enthalten in

$$|g(\alpha \pm \beta)|.$$

Nach der SCHWARZSCHEN Ungleichung hat man

$$[g(a \pm b)]^2 \leq g^2 \cdot (a \pm b)^2,$$

woraus wegen (1) und $g^2=1$ folgt:

$$= a^2 + b^2, \quad \text{w. z. b. w. .}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $a+b$ oder $a-b // g$ ist.

3. Im n -dimensionalen euklidischen Raum sei ein Quader mit den paarweise senkrechten Kantenvektoren a_1, a_2, \dots, a_n gegeben. Dann ist dementsprechend

$$(g \cdot \sum_1^n \pm a_i)^2 \leq g^2 \cdot (\sum_1^n \pm a_i)^2 = \sum_1^n a_i^2,$$

also

$$(3) \quad \sum_1^n |(ga_i)| \leq \sqrt{\sum_1^n a_i^2}.$$

Hierin gilt das Gleichheitszeichen nur in einem Falle oder dem andern, wo $\sum_1^n \pm a_i // g$ ist.

4. Statt der Kanten der Quader können auch Flächen u. s. w. betrachtet werden. Z. B. im R_3 bei der Orthogonalprojektion der Quaderflächen auf einer beliebigen Ebene mit dem Normaleneinheitsvektor u ist

$$\left\{ u \left(\pm \frac{ab}{c} c \pm \frac{bc}{a} a \pm \frac{ca}{b} b \right) \right\}^2 \leq a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2.$$

Die Summe der Projektionen ist also höchstens

$$\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}.$$

(2)

Im folgenden mögen wir Bemerkungen über die Arbeit⁽¹⁾. **Über Flächen und Kurven (IX), Nr. (8)** machen.

(1) MATSUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (IX), Mem. of the Faculty of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ. Vol. XV (1935).

Die Eilinie $\bar{x}(t)$ habe in den Gegenpunkten dieselbe Affinnormale. Wir behaupten, dass \bar{x} eine Ellipse ist.

Beweis: Der Gegenpunkt von \bar{x} wird $\bar{\bar{x}}$ genannt.

s sei der Affinbogen, für den die Gleichungen gelten.

(BLASCHKE, Differentialgeometrie (II))

$$(1) \quad (\bar{x}', \bar{x}') = 1, k\bar{x}'(s) + \bar{x}'''(s) = 0, (k \text{ Affinkrümmung}).$$

Nach der Voraussetzung ist

$$(2) \quad \bar{\bar{x}} - \bar{x} = a \cdot \bar{x}'' = -\bar{a} \bar{x}''.$$

Die Affinevoluten \bar{y} in \bar{x} und $\bar{\bar{x}}$ fallen miteinander zusammen, es ist also

$$(3) \quad \bar{y} = \bar{x} + \frac{1}{k} \bar{x}'' = \bar{\bar{y}} = \bar{\bar{x}} + \frac{1}{k} \bar{\bar{x}}'',$$

wobei noch

$$(4) \quad \bar{y}' = \left(\frac{1}{k} \right)' \bar{x}'' = \bar{y}' \frac{d\bar{s}}{ds} = \left(\frac{1}{k} \right)' \bar{\bar{x}}'' \frac{d\bar{s}}{d\bar{s}}$$

ist. Nun folgt aus (2) und (1)

$$(5) \quad \frac{d\bar{x}}{ds} - \bar{x}' = a\bar{x}''' + a'\bar{x}'' = -ak\bar{x}' + a'\bar{x}''.$$

Da aber $\bar{x}' \parallel \frac{d\bar{x}}{ds}$ ist, so muss $a' = 0$, $a = \text{const.} = \bar{a}$

sein.

Aus (5) ergibt sich dann

$$(6) \quad \begin{cases} (ak-1) \bar{x}' = -\frac{d\bar{x}}{ds} = -\bar{x}' \frac{d\bar{s}}{ds}, \\ a = \bar{a} = \text{const.}, \end{cases}$$

wenn (1) und (4)

$$(ak-1) \left(\frac{1}{k} \right)' = - \left(\frac{1}{k} \right)' \bar{s}^2.$$

Bei der Differentiation von (6) folgt

$$ak'\xi' + (ak-1)\xi'' = -\bar{\xi}''\bar{s}'^2 - \bar{\xi}'\bar{s}'', \text{ nach (6) und (2)}$$

$$= \bar{\xi}''\bar{s}'^2 + \frac{\bar{s}''}{\bar{s}'}(ak-1)\xi', \text{ also}$$

$$\frac{d \log (ak-1)}{ds} = \frac{d \log \bar{s}'}{d\bar{s}}, \quad ak-1 = \bar{s}'^2,$$

$$ak-1 = c \bar{s}' \quad \bar{s}' = c, \quad (c \text{ konst.})$$

Wegen der Geschlossenheit musz

$$c = \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{1}{c}$$

sein, also

$$\bar{s}' = c = 1, \quad ak = 2 = a\bar{k},$$

$$\text{d. h.} \quad k = \bar{k} = \frac{2}{a} = \text{const.}$$

Die einzigen Eilinen konstanter Affinkrümmung sind aber die Ellipse, w. z. b. w. .

(3)

Nimmt man $q_1, q_2, \bar{s}_1, \bar{s}_2$ in ϵ wie $p_1, p_2, \bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$ in ξ , so kann man

$$(1) \quad 2 \frac{p_1 + p_2}{\rho_1^{-\frac{1}{3}} + \rho_2^{-\frac{1}{3}}}, \quad \frac{q_1 + q_2}{\bar{s}_1^{-\frac{1}{3}} + \bar{s}_2^{-\frac{1}{3}}}$$

als relative affine Breite definieren.⁽¹⁾

Nimmt man

$$(2) \quad b = 2 \frac{\{(\xi_2 - \xi_1) \xi_1\}}{(e_1'' \xi_1) + (e_2'' \xi_2)}$$

statt b in HIRAKAWAS Arbeit,⁽²⁾ so besteht der folgende

(1) Vergl. HIRAKAWA, J.: The affine breadth and its telation to the relative breadth, Japanese Journ. of Math. vol. XII, (1935) p. 43.

(2) 1. c. (1).

Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Affinbreite von \mathfrak{x} konstant ist, ist die, dass die Vektoren $\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{e}_1'' - \mathfrak{e}_2''$ zueinander parallel sind.

Definieren wir b mit

$$(3) \quad b = 2 \frac{\{(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) \hat{\mathfrak{e}}_1\}}{(\mathfrak{e}_1'' \hat{\mathfrak{e}}_1) + (\mathfrak{e}_2'' \hat{\mathfrak{e}}_2)},$$

so folgt

$$(4) \quad \frac{2}{b} = \frac{\left\{ \frac{\bar{\rho}_1}{\sigma_1} \right\}^{\frac{1}{3}}}{p_1} + \frac{\left\{ \frac{\bar{\rho}_2}{\sigma_2} \right\}^{\frac{1}{3}}}{p_2},$$

wo

$$(5) \quad \begin{cases} p_1 = \bar{\rho}_1^{\frac{1}{3}} \{(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) \hat{\mathfrak{e}}_1\}, \\ p_2 = \bar{\rho}_2^{\frac{1}{3}} \{(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \hat{\mathfrak{e}}_2\}, \quad (\mathfrak{e}_i'' \hat{\mathfrak{e}}_i) = \rho_i^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

und $\bar{\sigma}_i$ in \mathfrak{e} ebenso bedeuten wie $\bar{\rho}_i$ in \mathfrak{x} .

Geometrische Deutung von (4) ist, dass b das gewichte harmonische Mittel zwischen p_1 und p_2 ist.

Ebenso wie im Raume können wir annehmen:

$$(6) \quad b = 2 \frac{\{(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) \hat{\mathfrak{e}}_1\}}{(\eta_1 \hat{\mathfrak{e}}_1) + (\eta_2 \hat{\mathfrak{e}}_2)},$$

so folgt

$$(7) \quad \frac{2}{b} = \frac{\left\{ \frac{\bar{K}_1}{L_1} \right\}^{\frac{1}{3}}}{p_1} + \frac{\left\{ \frac{\bar{K}_2}{L_2} \right\}^{\frac{1}{3}}}{p_2}.$$

wo

$$(8) \quad \begin{cases} p_1 = \bar{K}_1^{-\frac{1}{3}} \{(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) \hat{\mathfrak{e}}_1\}, \\ p_2 = \bar{K}_2^{-\frac{1}{3}} \{(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) \hat{\mathfrak{e}}_2\}, \\ (\eta_i \hat{\mathfrak{e}}_i) = \bar{K}_i^{\frac{1}{3}}, \quad \bar{K}_i > 0, \end{cases}$$

η_i bedeuten in \mathfrak{e} ebenso wie η_i in \mathfrak{x} .

Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

die Affine Breite von einem Eikörper konstant ist, ist die, dass $\xi_1 - \xi_2$ zu $\eta_1 - \eta_2$ parallel ist.

Beweis: Aus

$$(9) \quad [\{\xi_1 - \xi_2 + \frac{b}{2}(\eta_1 - \eta_2)\} \xi_1] = 0$$

folgt

$$(10) \quad \xi_1 - \xi_2 + \frac{b}{2}(\eta_1 - \eta_2) = \alpha e_{1u} + \beta e_{1v}$$

also

$$(11) \quad \begin{aligned} \xi_{1u} - \xi_{2u} + \frac{b}{2}(\eta_{1u} - \eta_{2u}) &= \alpha e_{1uu} + \beta u_{1uv} + \alpha_u e_{1u} + \beta_u e_{1v}, \\ \xi_{1v} - \xi_{2v} + \frac{b}{2}(\eta_{1v} - \eta_{2v}) &= \alpha e_{1vv} + \beta e_{1vu} + \alpha_v e_{1u} + \beta_v e_{1v}, \end{aligned}$$

wo b konstant ist.

Aus⁽³⁾ $\xi_i = p_i^k e_{1k}$ und $\eta_{1i} = B_i^k e_{1k}$ ergibt⁽⁴⁾ sich $\alpha = \beta = 0$, so ist $\xi_1 - \xi_2$ zu $\eta_1 - \eta_2$ parallel.

Man kann leicht beweisen, dass es hinreichend ist.

Wenn b konstant ist, so folgt

$$(12) \quad \xi_1 - \xi_2 + \frac{b}{2}(\eta_1 - \eta_2) = 0.$$

Haben zwei Eiflächen im Punkt paralleler Normalen auch stets parallele Affinnormalen, so kann man setzen:

$$(13) \quad \begin{cases} e_{1u} = -R_1^i \eta_{iu} = -R_1^i \eta_{iu}, \\ e_{1v} = -R_2^i \eta_{iv} = -R_2^i \eta_{iv}, \end{cases}$$

so entsteht

$$(14) \quad \begin{cases} \left(1 - \frac{b}{2R_1^i}\right) \xi_{1u} = \left(1 - \frac{b}{2R_1^i}\right) \xi_{2u}, \\ \left(1 - \frac{b}{2R_2^i}\right) \xi_{1v} = \left(1 - \frac{b}{2R_2^i}\right) \xi_{2v}, \end{cases} \text{ so besteht} \\ b = 2 \frac{(D_1 + D_2) R_1^i R_1^i}{D_1 R_1^i + D_2 R_1^i} = 2 \frac{(D_1'' + D_2'') R_2^i R_2^i}{D_1' R_2^i + D_2' R_2^i}$$

(3) SCHAPIRO, H.: Über die Transplantation der Parallelübertragung und den Kurvensystem, Monatsheft für Math. und Physik, 41 Bd., S. 240.

(4) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeo., II.

so folgt der

Satz: Wenn ξ und e im Punkte paralleler Normalen auch stets Affinnormalen haben, so besteht (15).

Nach HIRAKAWA ist die Affinbreite

$$(15) \quad 2 \frac{\{(\xi_2 - \xi_1) \hat{\xi}_1\}}{(\xi_1'' \hat{\xi}_1) + (\xi_2'' \hat{\xi}_2)},$$

so ist

$$(16) \quad \frac{\{(\xi_2 - \xi_1) \hat{\xi}_1\}}{(\xi_1'' \hat{\xi}_1) + (\xi_2'' \hat{\xi}_2)} = \frac{\left\{(\xi_2 - \xi_1) \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right\}}{\left(\xi_1'' \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) - \left(\xi_2'' \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right)}$$

die Bedingung dafür, dass die Eilinie das umschriebene Affinquadrat hat.

Wenn

$$(17) \quad \frac{\{(\xi_2 - \xi_1) \hat{\xi}_1\}}{(\xi_1'' \hat{\xi}_1) + (\xi_2'' \hat{\xi}_2)} = \text{const.}$$

stets besteht, so muss unsere Eilinie konstante Breitenkurve sein.

Nehmen wir

$$(18) \quad b = 2 \frac{\{(e_2 - e_1) \hat{\xi}_1\}}{\xi_1'' \hat{\xi}_1 + (\xi_2'' \hat{\xi}_2)},$$

so folgt

$$\begin{aligned} (19) \quad \frac{b}{2} &= \frac{(\xi_1'' \hat{\xi}_1) + (\xi_2'' \hat{\xi}_2)}{\{(e_2 - e_1) \hat{\xi}_1\}} = \frac{\bar{\rho}_1^{-\frac{1}{2}} + \bar{\rho}_2^{-\frac{1}{2}}}{\{(e_2 - e_1) \hat{\xi}_1\}} \\ &= \frac{1}{\rho_1^{\frac{1}{2}} \{(e_2 - e_1) \hat{\xi}_1\}} + \frac{1}{\rho_2^{\frac{1}{2}} \{(e_2 - e_1) \hat{\xi}_1\}} \\ &= \frac{\left(\frac{\bar{\sigma}_1}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\bar{\sigma}_1^{\frac{1}{2}} \{(e_2 - e_1) \hat{\xi}_1\}} + \frac{\left(\frac{\bar{\sigma}_2}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\bar{\sigma}_2^{\frac{1}{2}} \{(e_2 - e_1) \hat{\xi}_1\}} \end{aligned}$$

$$(20) \quad \begin{cases} p_1 = \bar{\sigma}_1^{-\frac{1}{2}} \{ (e_2 - e_1) \xi_1 \}, & p_2 = \bar{\sigma}_2^{-\frac{1}{2}} \{ (e_1 - e_2) \xi_2 \}, \\ \bar{\rho}_1^{-\frac{1}{2}} (\xi_1'' \xi_1), & \bar{\rho}_2^{-\frac{1}{2}} (\xi_2'' \xi_2), \\ \bar{\sigma}_1^{-\frac{1}{2}} (e_1'' \xi_1), & \bar{\sigma}_2^{-\frac{1}{2}} (e_2'' \xi_2). \end{cases}$$

Wenn b konstant ist, so folgt

$$(21) \quad [\{ (e_1 - e_2) + \frac{b}{2} (\xi_1'' - \xi_2'') \} \xi_1] = 0.$$

Aus (21) kann man wissen, dass $e_1 - e_2$ zu $\xi_1'' - \xi_2''$ parallel ist.

Wenn wir

$$b = 2 \frac{ \{ (e_2 - e_1) \xi_1 \} }{ (\eta_1 \xi_1) + (\eta_2 \xi_2) }$$

als affine Breite von einer Eifläche definieren, so folgt⁽⁵⁾

$$b = \frac{q_1 + q_2}{K_1^{\frac{1}{2}} + K_2^{\frac{1}{2}}},$$

weiter ergibt sich der

Satz: Wenn b konstant ist, so besteht

$$b = 2 \frac{ (d_1 + d_2) r_1^{\frac{1}{2}} r_1^2 }{ d_1 r_1^2 + d_2 r_1^{\frac{1}{2}} } = 2 \frac{ (d_1' + d_2') r_2^{\frac{1}{2}} r_2^2 }{ d_1' r_2^2 + d_2' r_2^{\frac{1}{2}} },$$

wo

$$d_i = (e_{iuv} \xi_i), \quad d_i' = (e_{iuv} \xi_i)$$

und $r_1^{\frac{1}{2}}, r_2^{\frac{1}{2}}$ Radii von Affinkrümmungen von e_i sind.

q_i sind in e sogut wie p_i in ξ .

(4)

Es seien Eilinen ξ, e, X, E in R_2 gegeben. Mit p, q, P, Q bezeichne ich die Abstände der Tangente von O , mit φ den Winkel der Tangente gegen eine feste Richtung.⁽¹⁾

(5) l. c. (1) p. 48.

(1) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeo. I, Japanese Journ. of Math. Vol. IV (1927), p. 57.

Dann ordnen wir je vier Punkte von ξ , ϵ , ... zu, für welche die Vektoren $\hat{\xi}$ miteinander übereinstimmen, und bezeichnen die Grösse

$$(1) \quad r(\hat{\xi}) = \frac{(\xi \hat{\xi})}{(\epsilon \hat{\xi})} : \frac{(X \hat{\xi})}{(E \hat{\xi})} = \frac{p(\xi)}{q(\xi)} : \frac{P(E)}{Q(E)}$$

als den „R.-Abstand“ der ξ -Tangente ($\hat{\xi}$) von O, selbstverständlich „bezüglich ϵ , X, E“.

Der „R.-Bogen“ von ξ wird bestimmt durch

$$(2) \quad \sqrt{\xi^2}(\bar{s}) = P : qQ,$$

oder für einen beliebigen Parameter t durch

$$(3) \quad s = \int \frac{qQ}{P} ds(\xi),$$

woraus

$$(4) \quad \frac{ds}{d\sigma} : \frac{dS}{d\Sigma} = \rho = \frac{\bar{\rho}(\xi)}{\rho(\epsilon)} : \frac{\bar{\rho}(X)}{\rho(E)}$$

hervorgeht.

Die Grösse ρ hierin heisst der „R.-Krümmungsradius“ von ξ . Für „R.-Kreise“ ist ρ konstant.

Ein Kurvenpunkt, in welchem der „R.-Krümmungsradius“ einen stationären Wert besitzt ($\rho' = 0$), wird „R.-Scheitel“ genannt.

Dann gilt

$$\left(\frac{\bar{\rho}(\xi)}{\rho(\epsilon)} \right)' \left(\frac{\bar{\rho}(X)}{\rho(E)} \right) = \left(\frac{\bar{\rho}(X)}{\rho(E)} \right)' \left(\frac{\bar{\rho}(\xi)}{\rho(\epsilon)} \right),$$

$$\text{d. h.} \quad \frac{\bar{\rho}(\xi)}{\rho(\epsilon)} = \frac{\bar{\rho}(X)}{\rho(E)}.$$

Jetzt verhält es sich mit unsrer Untersuchung wie mit Süss' Arbeit, nur dass wir q , P , E statt q nehmen.

(5)

Es seien zwei Raumkurven ξ und ϵ durch parallele Tangenten

punktwise eindeutig zugeordnet, so kann man setzen⁽²⁾

$$(1) \quad x' = \mu e',$$

$$(2) \quad \mu = \frac{\rho(x)}{\rho(e)} = \frac{\tau(x)}{\tau(e)} = \frac{\rho(x) + i\tau(x)}{\rho(e) + i\tau(e)}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

μ bedeutet „R.-Krümmungsradius“ von x bezüglich e .

Betrachten wir zwei Vektoren $v(x)$, $v(e)$ in $\rho\tau$ -Ebene, wo

$$(3) \quad \begin{cases} v(x) = \rho(x) + i\tau(x), \\ v(e) = \rho(e) + i\tau(e), \end{cases}$$

ist, so ergibt sich⁽³⁾ aus (2)

$$(4) \quad \mu = \frac{v(x)}{v(e)} = \frac{d\bar{s}(x)}{d\bar{s}(e)}.$$

$$(6)$$

Wenn,

$$(1) \quad (x_1 - x_2)^2 = (y_1 - y_2)^2,$$

$$(2) \quad \int_1^2 x^2 dt - \int_1^2 y^2 dt,$$

$$(3) \quad \int_1^2 (x, x') dt - (x_1, x_2) = \int_1^2 (y, y') dt - (y_1, y_2)$$

für zwei Eilinen $x(t)$, $y(t)$ bestehen, so folgen

$$(4) \quad (x'_1 - x'_2 k)(x_1 - x_2) = (y'_1 - y'_2 k)(y_1 - y_2),$$

$$(5) \quad (x'_1 - x'_2 k)(x'_1 + x'_2 k) = (y'_1 - y'_2 k)(y'_1 + y'_2 k),$$

$$(6) \quad (x_2 - x_1, x'_1 + x'_2 k) = (y_2 - y_1, y'_1 + y'_2 k), \quad k = dt_2/dt_1,$$

Seien $y_2 - y_1$ parallel zu $y'_2 + y'_2 k$ und $x_1 - x_2$ parallel zu $x'_1 + x'_2 k$, so bestehen (4), (5), (8), und so folgt der

(2) MATSUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (XI), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XV (1935), p. 175.

(3) SUSS, W.: Zur relativen Differentialgeo. IV, Tôhoku Math. Journ. 29 (1928), p. 361.

MATSUMURA, S.: Ueber Flächen und Kurven (XI), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Vol. XV (1935), p. 179.

Satz: Seien ξ, η GERICKES Eilinie⁽¹⁾ so bestehen (1), (2), (3).

Ist

$$\xi_2 - \xi_1 = 1$$

statt

$$(\xi_2 - \xi_1)^2 = \text{const.}$$

in GERICKES Arbeit⁽²⁾, so besteht GERICKES Satz⁽³⁾ auch.

(7)

Im folgenden möchte ich meine Arbeit⁽⁴⁾ vom Standpunkt der relativgeometrischen affinen Flächentheorie aus untersuchen. Indem wir die Beziehungen in der Arbeit⁽⁵⁾ von WITT anführen, erhalten wir für die beiden Flächen ξ und ξ^*

$$(1) \quad \xi = \xi^*, \quad \eta = \eta^*, \quad \sigma\eta = \eta^*.$$

Wegen

$$\eta\eta = \eta^*\eta^* = 1,$$

folgt sofort

$$\rho = \sigma.$$

Wegen

$$\eta_i = B_i^j \xi_j,$$

folgt ferner aus

$$\eta_i = \rho_i \eta^* + \rho \eta_i^*$$

$$\rho_i = 0.$$

(1) GERICKE, H.: Einige kennzeichnende Eigenschaften des Kreises, Math. Zeitschrift, 40 Bd. S. 420.

(2) l. c. (1).

(3) l. c. (1), S. 419.

(4) MATSUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (XIV), Mem. of the Faculty of Sci. and Agri., Taihoku Imperial University, vol. XV (1935), p. 252.

(5) WITT, R.: Eine relativgeometrische Erweiterung der affinen Flächentheorie, Compositio Mathematica, vol. 1 (1935), S. 430.

Also ist

$$(2) \quad \rho = \sigma = \text{const.}$$

Bekanntlich ist nun

$$\delta = - \left(\frac{\bar{K}(\xi)}{\bar{K}(\epsilon)} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{c}$$

wo \bar{K} die GAUSZSCHE Krümmung bedeutet.

Also folgt aus (1) und (2)

$$\frac{\bar{K}(\xi^*)}{\bar{K}(\xi)} = \text{const.},$$

so folgt der

Satz: *Haben zwei Eiflächen in den Punkten paralleler Normalen auch stets parallele Verallgemeinerung des Affinnormalvektors, so sind sie homothetisch.*

(8)

Nehmen wir

$$b = \int_1^q \tilde{x}^{1/2} dt$$

als eine neue Definition von Bogenlänge, so besteht GERICKES Satz⁽¹⁾ auch.

(9)

Definieren⁽²⁾ wir affine Breite b mit⁽³⁾

$$(1) \quad b = 2 \frac{\{(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) \eta_1\}}{(\tilde{x}_{ik1} \eta_1) + (\tilde{x}_{ik2} \eta_2)},$$

-
- (1) GERICKE, H.: Einige Kennzeichnende Eigenschaften des Kreises, Math. Zeitschrift 40 (1935), S. 419.
 (2) Vergl. WITT, R.: Eine relativgeo. Erweiterung der affinen Flächentheorie, Compositio Mathematica, vol. 1 (1935), p. 429.
 (3) HIRAKAWA, J.: The affine breadth and its relation to the relative breadth, Jap. Journ. of Math. vol. XII (1935), p. 42.

so haben wir

$$(2) \quad b = 2 \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2 (B_{ik_1} + B_{ik_2})}$$

Wenn $b=1$ ist, so folgt

$$(3) \quad \eta_1 - \eta_2 = \eta_2 B_{ik_1} + \eta_2 B_{ik_2}.$$

(3) ist die Bedingung dafür, dass unsere Eifläche die konstante Breite ist.⁽⁴⁾

(10)

Wir betrachten

$$(1) \quad \rho = \frac{d\bar{s}(\chi)}{d\bar{s}(c)}.$$

Setzen wir

$$(2) \quad d\bar{s}(c) = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad d\bar{s}(\chi) = \sqrt{du^2 + dv^2},$$

$$(3) \quad du = u_x dx + u_y dy, \quad \text{u. s. w.}$$

$$(4) \quad \{d\bar{s}(\chi)\}^2 = E_{11}dx^2 + 2E_{12}dxdy + E_{22}dy^2,$$

$$(5) \quad E_{11} = u_x^2 + v_x^2, \quad \dots$$

$$(6) \quad \rho^2 = R,$$

so folgt

$$(7) \quad R = \frac{E_{11}dx + \dots}{dx^2 + dy^2}.$$

Für Maximum-oder Minimumwerte von (7) besteht

$$(8) \quad \begin{cases} E_{11}dx + E_{12}dy = Rdx, \\ E_{21}dx + E_{22}dy = Rdy, \end{cases}$$

Eliminieren wir dx, dy , so folgt

(4) Vergl. BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeo. II, S. 162.

$$(9) \quad \begin{vmatrix} E_{11}-R & E_{12} \\ E_{21} & E_{22}-R \end{vmatrix} = 0.$$

Korrespondieren R, ρ mit dem Werte R in (9), so folgt

$$(10) \quad dx(\rho \partial x) + dy(\rho \partial y) = R(dx \partial x + dy \partial y),$$

oder

$$(11) \quad (\rho - R)(dx \partial x + dy \partial y) = 0, \quad (\rho \vdash R).$$

(11) bedeutet, dass zwei Richtungen R in (9) zueinander senkrecht sind.

Man kann beweisen, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass R in (7) immer konstant ist,

$$(12) \quad E_{11} = E_{22} = E, \quad E_{12} = 0$$

ist.

(11)

Aus HAYASHI'S Arbeit⁽¹⁾ ergibt sich

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 = & -\{p(\varphi_1) + p(\varphi_1 + \pi)\} \sin(\varphi - \varphi_1) \\ & + \{p'(\varphi_1) + p'(\varphi_1 + \pi)\} \cos(\varphi - \varphi_1) \end{aligned}$$

wo

$$(2) \quad \begin{aligned} & \{p(\varphi_1) + p(\varphi_1 + \pi)\} \cos(\varphi - \varphi_1) \\ & + \{p'(\varphi_1) + p'(\varphi_1 + \pi)\} \sin(\varphi - \varphi_1) = 0. \end{aligned}$$

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \quad \rho_1 + \rho_2 = - \frac{[p(\varphi_1) + p(\varphi_1 + \pi)]^2}{1' [p(\varphi_1) + p(\varphi_1 + \pi)]^2 + [p'(\varphi_1) + p'(\varphi_1 + \pi)]^2}$$

Damit (3) konstant sei, für alle φ_1 , muss

$$p'(\varphi_1) + p'(\varphi_1 + \pi) = 0$$

(1) HAYASHI, T.: The Extremal Chords of an Oval, Tôhoku Math. Journ. 22 (1923), p. 389.

oder

$$p(\varphi_1) + p(\varphi_1 + \pi) = \text{const.}$$

sein. Also folgt der

Satz: *Ist die Maximum-Sehne für jede Richtung immer konstant, so muss unsere Eilinie die konstante Breite sein.*

(12)

Im folgenden mögen wir Bemerkungen über eine Umkehrung eines Satzes von BRUNN machen.

Neulich wurde ein Eibereich mit dem Mittelpunkt dadurch charakterisiert, dass jeder seiner Punkte mit Ausnahme des Mittelpunktes genau eine durch ihn hindurchgehende Sehne halbiert. Hierzu möchte ich noch folgende Ergänzung machen:

Satz: *In jedem Eibereich gibt es stets einen Punkt, der mindestens zwei Sehnen halbiert.*

Beweis: Für jeden Punkt P des Bereichs als Pol sei die Randkurve auf Polarkoordinaten r, φ bezogen.

Die 0-Richtung für φ sei in allen Punkten P stets dieselbe.

Dann betrachten wir das Integral

$$(1) \quad I(P) = \int_0^\pi \{r(\varphi) - r(\pi + \varphi)\} d\varphi$$

als die Funktion der Orte P im Eibereich.

Es seien nun A, B die beiden Gegenpunkte der Randkurve, deren Stützgeraden zur 0-Richtung von φ parallel sind.

Dann ist offensichtlich

$$\text{sign } I(A) = -\text{sign } I(B).$$

Da $I(P)$ eine stetige Funktion ist, gibt es also auf jeder stetigen Verbindung von A und B einen Punkt C, wo $I(C) = 0$ ist. Also wählen

wir solche Verbindungskurve K zu dem geometrischen Ort der Mittelpunkte der Paralleelsehnen zu den Stützgeraden in A und B .

Dann ist in C

$$r(0) = r(\pi)$$

und es muss wegen

$$I(C) = 0$$

zwischen 0 und π mindestens noch einen Wert φ geben, für den

$$r(\varphi) = r(\varphi + \pi)$$

ist, w. z. b. w..

Zusatz: *Hat ein Eibereich höchstens einen Ausnahmepunkt C , der mehr als eine seiner Sehnen halbiert, so muss dieser der Mittelpunkt sein.* (die Umkehrung des BRUNNSCHEN Satzes.)

Beweis: Im obigen Beweis war die 0 -Richtung von φ beliebig, und für sie in C stets

$$r(0) = r(\pi)$$

bewiesen, woraus unsre Behauptung folgt.

(13)

Aus (12) kann man wissen, dass man in einer Eilinie ein Parallelogramm innen umschreiben kann.

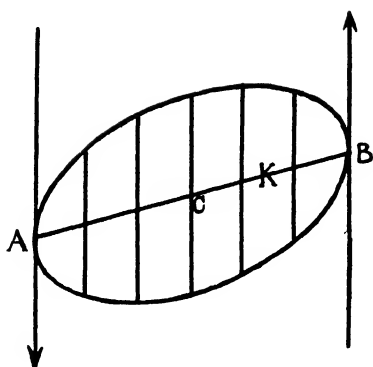
Aus (12) kann man auch EMCHS Satz⁽¹⁾ (VII) beweisen.

Setzen wir $p(\varphi)$ anstatt $r(\varphi)$ in (12), so kann man untersuchen wie in (12), wo $p(\varphi)$ Stützgeradenfunktion ist.

Anstatt (1) in (12) kann man

$$I(P) = \int_0^\pi \{p(\varphi)r(\varphi) - p(\varphi + \pi)r(\varphi + \pi)\} d\varphi$$

(1) EMCH, A.: Some Properties of Closed Convex Curves in a Plane, American Journ. of Math. XXXV, p. 410.



ansetzen, wo ρ Krümmungsradius ist.

Man kann diese Sätze relativgeometrisch verallgemeinern.

Mit derselben Methode kann man den folgenden Satz beweisen.

In jedem Eibereich gibt es stets einen Punkt, der mindestens zwei Sehnen hat, an deren Endpunkten die Affinnormalen ein Parallelogramm bilden.

Um zu beweisen, betrachten wir

$$I(p) = \int_0^\pi \left\{ \left(\frac{d\rho}{ds} \right)_{\varphi=\varphi+\pi} \cdot r(\varphi) - \left(\frac{d\rho}{ds} \right)_{\varphi=\varphi} \cdot r(\varphi+\pi) \right\} d\varphi.$$

Für das relative Parallelogramm in einer Eilinie ξ besteht⁽⁴⁾

$$(1) \quad \begin{cases} q_1 q_2 (\xi_1 - \xi_2)^2 = q_3 q_4 (\xi_3 - \xi_4)^2, \\ q_2 q_3 (\xi_1 - \xi_3)^2 = q_4 q_1 (\xi_4 - \xi_1)^2. \end{cases}$$

Dies ist immer ausführbar, weil aus (1) folgt:

$$q_1 q_2 = q_3 q_4, \quad q_2 q_3 = q_4 q_1, \quad \text{d. h. } (2) \quad q_1 = q_3,$$

denn man kann setzen: $(\xi_1 - \xi_2)^2 = (\xi_3 - \xi_4)^2$, $(\xi_1 - \xi_2)^2 = (\xi_4 - \xi_1)^2$, und (2) ist immer ausführbar.

Weiter kann man beweisen, dass man in einer Eilinie ein Quadrat in einen relativen Raum innen umschreiben kann.

Dies ist die Verallgemeinerung von EMCHS Satz.⁽⁵⁾

(14)

Aus BLASCHKES Satz⁽¹⁾ kann man den folgenden Satz⁽²⁾ beweisen.

Satz: *Man kann mindestens drei Punktepaare auf einer Eilinie finden, so wie in jedem Punktepaar Stützgeraden zueinander parallel*

(4) Vergl. HIRAKAWA, J.: The Euclidean Relative Differential Geometry, I, Proceedings of the Physico-Math. Society of Japan, Vol. 17 (1935), p. 513.

(5) l. c. (1).

(1) Archiv d. Math. und Physik, vol. 26 (1917) p. 65.

(2) Vergl. Tokyo Buzurigakko Zashi 35 (1926) p. 437.

und Abstände vom Krümmungsschwerpunkt zu den Stützgeraden einander gleich sind.

(15)

Wir betrachten eine Eilinie E, so folgt

$$(1) \quad \begin{cases} x(\varphi) = p(\varphi) \sin \varphi + p'(\varphi) \cos \varphi, \\ y(\varphi) = -p(\varphi) \cos \varphi + p'(\varphi) \sin \varphi, \end{cases}$$

wo x, y kartesische Koordinaten und p, φ polare Koordinaten sind. Wenn s Affinlänge und ρ Krümmungsradius von E ist, so bestehen⁽¹⁾

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{ds} = \rho^{\frac{1}{2}} \cos \varphi, & \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{3} \rho^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \varphi - 3 \rho \sin \varphi \right\}, \\ \frac{dy}{ds} = \rho^{\frac{1}{2}} \sin \varphi, & \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{3} \rho^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{d\rho}{d\varphi} \sin \varphi + 3 \rho \cos \varphi \right\}. \end{cases}$$

Ist

$$(3) \quad \frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} = \{x(\varphi) + x(\varphi + \pi)\} : \{y(\varphi) + y(\varphi + \pi)\},$$

so folgt aus (3)

$$(4) \quad D(\varphi) \frac{d\rho}{d\varphi} + 3\rho \frac{dD(\varphi)}{d\varphi} = 0, \text{ wo } D \equiv p(\varphi) - p(\varphi + \pi),$$

d. h.

$$(5) \quad \rho(\varphi) \{D(\varphi)\}^3 = \text{const},$$

so besteht

$$(6) \quad \rho(\varphi) + \rho(\varphi + \pi) = 0,$$

also muss E π_0 -Kurve sein.

Aus⁽²⁾

(1) Zenkoku Sizio Sugaku Danwakai, 69, p. 8.

(2) HAYASHI, T.: On osculating Conic of a Plane Curve, Rigakaishi, (Tokyo Kotoshihangakko), Vol. 19, p. 5.

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{3} \rho^{-\frac{1}{3}} \left\{ \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \varphi - 3\rho \sin \varphi \right\}, \\ \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{3} \rho^{-\frac{1}{3}} \left\{ \frac{d\rho}{d\varphi} \sin \varphi + 3\rho \cos \varphi \right\} \end{cases}$$

und

$$(8) \quad R = \frac{3\rho^2}{I} (9\rho^2 + \rho_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

ergibt sich

$$(9) \quad R = \frac{9\rho^{\frac{5}{3}}}{I} \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}.$$

Weiter kann man finden⁽³⁾

$$(10) \quad \begin{cases} x_1 = 3\rho^{\frac{2}{3}} I^{-2} J \frac{d^2x}{ds^2}, \\ y_1 = 3\rho^{\frac{2}{3}} I^{-2} J \frac{d^2y}{ds^2}. \end{cases}$$

Mit

$$\int_0^{2\pi} 3\rho^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2} \frac{|J|}{I^2} d\varphi$$

kann man den Umfang des Ortes vom Schmiegunungsmittelpunkt bezeichnen.⁽⁴⁾

(16)

Um die algebraische Geometrie zu untersuchen, nehmen wir in den relativen geometrischen Raum

$$(1) \quad \begin{aligned} a_0(f)^m + (f)^{m-1}(a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi) + (f)^{m-2}(a_2 \cos^2 \varphi \\ + b_2 \cos \varphi \sin \varphi + c_2 \sin^2 \varphi) + \dots + a_m \cos^m \varphi \\ + b_m \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi + \dots + k_m \cos \varphi \sin^{m-1} \varphi \\ + l_m \sin^m \varphi = 0, \end{aligned}$$

(3) l. c. (2).

(4) MOHRMANN, H.: Über beständig elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch gekrümmte Kurven, Math. Annalen 72 (1912), S. 285.

$$a'_0(\phi)^m + (\phi)^{m-1}(a'_1 \cos \varphi + b'_1 \sin \varphi) + (f)^{m-2}(a'_2 \cos^2 \varphi + b'_2 \cos \varphi \sin \varphi + c'_2 \sin^2 \varphi) + \dots = 0,$$

wo f, ϕ polare tangentielle Koordinaten sind.

Ist r R.-Abstand, so folgt $\dot{r} = f/\phi$, also

$$(2) \quad a_0(r\phi)^m + r^{m-1}(a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi) + (r\phi)^{m-2}(a_2 \cos^2 \varphi + b_2 \cos \varphi \sin \varphi + c_2 \sin^2 \varphi) + \dots + a_m \cos^m \varphi + b_m \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi + \dots + k_m \cos \varphi \sin^{m-1} \varphi + l_m \sin^m \varphi = 0.$$

Weiter betrachten wir

$$(3) \quad A_0(r\phi)^m + (r\phi)^{m-1}(A_1 \cos \varphi + B_1 \sin \varphi) + (r\phi)^{m-2}(A_2 \cos^2 \varphi + B_2 \cos \varphi \sin \varphi + C_2 \sin^2 \varphi) + \dots + A_m \cos^m \varphi + B_m \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi + \dots + K_m \cos \varphi \sin^{m-1} \varphi + L_m \sin^m \varphi = 0,$$

aus (2), (3) folgt LIOUVILLE's Satz.⁽⁵⁾

Dies ist zur relativdifferentialen Geometrie nutzbar.

(17)

Ist R.-Krümmungsradius von $\mathfrak{x}(s)$ bezüglich c konstant, so folgt⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \rho(c) dx(c) &= \text{const.} \quad \rho(c) dx(\mathfrak{x}), \\ \rho(c) dy(c) &= \text{const.} \quad \rho(c) dy(\mathfrak{x}), \\ \rho(c) dz(c) &= \text{const.} \quad \rho(c) dz(\mathfrak{x}); \\ \tau(c) dx(c) &= \text{const.} \quad \tau(\mathfrak{x}) dx(\mathfrak{x}), \\ \tau(c) dy(c) &= \text{const.} \quad \tau(\mathfrak{x}) dy(\mathfrak{x}), \\ \tau(c) dz(c) &= \text{const.} \quad \tau(\mathfrak{x}) dz(\mathfrak{x}), \end{aligned}$$

(5) YANAGIHARA, K.: On the Mean Center of Points on an Algebraic Curve, Tôhoku Math. Journ. 14 (1918) p. 81.

LIOUVILLE's Journ., 1 st Series, vol. VI, p. 359.

(1) SALKOWSKI, E.: Zur Bestimmung aller Raumkurven, für welche zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge eine gegebene Gleichung besteht, Berl. Math. Ges. 4-6 (1905-07), S. 65.

wo x, y, z die Koordinaten eines Punktes einer Raumkurve sind.

Speziell ergeben sich die Koordinaten eines Punktes der Bertrand'schen Kurven⁽²⁾

$$A\rho + B\tau = 1$$

in⁽³⁾ der Form⁽⁴⁾

$$x(\xi) = A \int \rho(\xi) dx(\xi) + B \int \tau(\xi) dx(\xi),$$

$$y(\xi) = A \int \rho(\xi) dy(\xi) + B \int \tau(\xi) dy(\xi),$$

$$z(\xi) = A \int \rho(\xi) dz(\xi) + B \int \tau(\xi) dz(\xi).$$

(18)

Die Relativbreite von einer A-Fläche bezüglich anderer A-Fläche ist

$$b = 2 \frac{[(\psi_2 \hat{\xi}_2 + \Delta(\psi_2, \hat{\xi}_2)) - (\psi_1 \hat{\xi}_1 + \Delta(\psi_1, \hat{\xi}_1))] \hat{\xi}_1}{(\psi_1 \hat{\xi}_1) + (\psi_2 \hat{\xi}_2)},$$

wo

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin w}{\partial v} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \frac{\partial \psi_1}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin w}{\partial v} \frac{\partial \psi_2}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \frac{\partial \psi_2}{\partial v} = 0$$

sind.⁽¹⁾

Betrachtet man R.-Geometrie einer A-Fläche bezüglich anderer A-Fläche, so kann man R.-Abstand durch Quadraturen aus

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0$$

- (2) MATSUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (XI), Mem. of the Fac. of the Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Vol. 15 (1935), p. 174.
- (3) MELLISH, A. P.: Note on Differential Geo., Annals of Math. 32, p. 190.
- (4) SIBIRANI, F.: Sulle curve di Bertrand, Rom. Acc. L. Rend. (15), 30, 41-43 (1921).
- (1) EISENHART, L. P.: Surface with the Same Spherical Representation of their Lines of Curvature as Pseudospherical Surfaces, American Journal of Math. vol. 27 (1905) p. 118.
- HIRAKAWA, J.: The affine breadth and its relation to the relative breadth, Japanese Journ. of Math. vol. XII (1935) p. 46.

finden, wenn

$$\frac{\partial \log \sin w}{\partial v} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} = 0,$$

$$\text{d. h.} \quad w = \sin^{-1}(e^v) \quad \text{oder} \quad w = \cos^{-1}(e^v)$$

sind, wo U Funktion nur von u und V Funktion nur von v sind.

Ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \frac{\sin w}{\lambda}}{\partial v} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial u} - \frac{\partial \log \frac{\cos w}{\lambda}}{\partial u} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \frac{\sin w}{\lambda}}{\partial v} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial u} - \frac{\partial \log \frac{\cos w}{\lambda}}{\partial u} \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial v} &= 0, \end{aligned}$$

so folgt⁽²⁾

$$b = 2 \frac{[\{\lambda \psi_3 \hat{\xi}_2 + \Delta(\lambda \psi_3, \hat{\xi}_2)\} - \{\lambda \psi_1 \hat{\xi}_1 + \Delta(\lambda \psi_1, \hat{\xi}_1)\} \hat{\xi}_1]}{(\psi_1 \hat{\xi}_1) + (\psi_2 \hat{\xi}_2)}.$$

Nach POINCARÉ'S Linearelement eines Kugelraumes, dessen Radius R gleich ist,

$$(1) \quad \frac{ds}{R^2 - r^2}.$$

In R.-Geometrie (1) ist

$$(2) \quad \frac{dS}{R^2 - \bar{r}^2},$$

wo R R.-Radius und \bar{r} R.-Abstand sind, weil weil

$$q ds = dS, \quad \sqrt{q} R = R, \quad \sqrt{q} r = \bar{r}.$$

(19)

Im folgenden mögen wir den kurzen Beweis eines Satzes von EMCH führen.

(2) STETSON, J. M.: Conjugate Systems of Curves, Annals of Math., 19, p. 108.

Von EMCH (Amer. Journ. 35, S. 407) rührt der Satz her, dass es für jede Eilinie mindestens ein einbeschriebenes Quadrat gibt.

Hierfür gibt es einen sehr einfachen Beweis: Die Eilinie (sei E) und r eine willkürliche Richtung in der Ebene von E .

Zu jeder Sehne s von E der Richtung r gibt es eine gleichlange parallele Sehne s' , falls s nicht gerade die maximale Sehne der Richtung r ist.

Das Paar s, s' bildet ein Parallelogramm, das umso gestreckter ist, je grösser $s=s'$ ist,

Aus Stetigkeitsgründen musz es aber dann unter allen Parallelogrammen $s, s' // r$ einen Rhombus (s, \bar{s}') geben.

Nun betrachten wir, dass die Richtung $\bar{r} // \bar{s}, s'$ für den Rhombus (\bar{s}, \bar{s}') beliebig ist.

Betrachten wir einen Eckwinkel α des Rhombus (\bar{s}, \bar{s}'), dessen zweites Paar von Gegenkanten wir (\bar{t}, \bar{t}') nennen, wobei

$$\bar{s} = \bar{s}' = \bar{t} = \bar{t}'$$

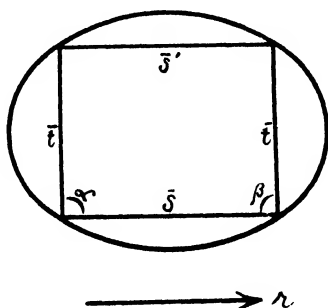
ist.

Der dem Winkel $\alpha = \angle(\bar{s}, \bar{t})$ entsprechende Winkel, wenn wir r solange drehen, bis $r // \bar{t}$ ist und zu der sich drehenden Richtung r stets den zugehörigen Rhombus betrachten, hat die Grösze

$$\beta = \angle(\bar{t}, \bar{s}) = \pi - \alpha.$$

Ist aber $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, so ist $\beta \geq \frac{\pi}{2}$.

Es musz also während der Drehung mindestens eine Lage r_0 geben, in der die Rhombenwinkel Rechte sind, sodass dieser Rhombus dann ein Quadrat ist, w. z. b. w..



(20)

Im folgenden mögen wir Bemerkungen über meine Arbeit⁽¹⁾ machen.

Ist

$$(1) \quad x \cos w + y \sin w - p = 0$$

eine Tangente zu Ebenerkurve, so ist

$$(2) \quad \left(-3 \sin w \cdot \rho + \cos w \cdot \frac{d\rho}{dw} \right) x + \left(3 \cos w + \sin w \cdot \frac{d\rho}{dw} \right) y \\ = 3\rho \frac{dp}{dw} + p \frac{d\rho}{dw}$$

die Gleichung von der Affinnormale⁽²⁾.

Ist φ die Deviation, so entsteht aus (1), (2):

$$(3) \quad \tan \varphi = \frac{\tan w + \left(-3 \sin w \rho + \cos w \frac{d\rho}{dw} \right) / \left(3 \cos w \cdot \rho + \sin w \cdot \frac{d\rho}{dw} \right)}{1 - \tan w \cdot \left(-3 \sin w \rho + \cos w \frac{d\rho}{dw} \right) / \left(3 \cos w \cdot \rho + \sin w \cdot \frac{d\rho}{dw} \right)} \\ = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{dw} = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} \frac{ds}{dw} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds},$$

weil

$$ds = \rho dw$$

ist, wo s die Kurvenlänge bedeutet.

Man kann (2) wie Folgendes umformen:

$$(4) \quad \sin(\varphi - w) \cdot x + \cos(\varphi - w) \cdot y = \frac{dp}{dw} \cos \varphi + p \sin \varphi,$$

weil

- (1) MATSUMURA, S.: Über einen affingeo. Satz und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ. 36 (1932), p. 189.
 (2) JERVIIS, S. D.: Some Properties of the Affine Normal, Tôhoku Math. Journ. 36 (1932), p. 320.

$$\frac{ds}{dw} = \rho, \quad \frac{d\rho}{dw} = \rho \frac{d\rho}{ds}$$

ist.

Aus (4) kann man wissen, dass der Umfang der Affinevolnte ist:

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{dp(w)}{dw} \cos \varphi + p(w) \sin \varphi \right) dw.$$

(21)

Im folgenden mögen wir Bemerkungen über meine Arbeit⁽¹⁾ machen.

Aus (4) in meiner Arbeit⁽²⁾ folgt

$$(1) \quad E'G' - F^2 = (R_1 R_2)^2 (EG - F^2) = (R_1 R_2)^2 (EG - F^2).$$

ξ und ϵ seien konform, so musz aus (I) $(R_1 R_2)^2 = 1$ sein, d. h. ξ, ϵ sind bis auf Translationen eindeutig bestimmt.

Dies ist nicht anders als MINKOWSKIS Satz.⁽³⁾

(22)

Wir haben

$$(1) \quad \rho = -\frac{\bar{\rho}(\xi)}{\rho(\epsilon)},$$

wo ρ R-Scheitel ist.

Aus (1) folgt

$$(2) \quad \rho' = -\frac{\bar{\rho}(\epsilon)\bar{\rho}'(\xi) - \bar{\rho}(\xi)\bar{\rho}'(\epsilon)}{\rho^2(\epsilon)} = 0,$$

daraus ergibt sich

(1) NAKAJIMA, S.: Zu einem Satz von H. MINKOWSKI, Tôhoku Math. Journ. vol. 29 (1928), p. 326.

(2) l. c. (1), p. 327.

(3) Volumen und Oberfläche. Ges. Abhandlg. Bd. II.

$$(3) \quad \frac{\tan \varphi(\xi)}{\tan \varphi(\epsilon)} = \frac{\frac{1}{3} \bar{\rho}'(\xi)}{\frac{1}{3} \rho'(\epsilon)} = \frac{\bar{\rho}(\xi)}{\rho(\epsilon)}$$

so folgt der

Satz: In R-Scheitel besteht (3).

(23)

I. Nehmen wir

$$(1) \quad \hat{\xi} = \hat{\xi}^*, \quad \hat{\beta} = \rho \hat{\beta}^*, \quad \sigma \hat{\eta} = \hat{\eta}^*; \quad \hat{\eta}_i = \beta_i^i \hat{\xi}_i, \\ -c \hat{\beta} = \left(\frac{\bar{K}(\xi)}{K(\epsilon)} \right)^{\frac{1}{4}}$$

in WITTS Arbeit⁽¹⁾ statt⁽²⁾

$$(2) \quad \hat{\xi} = \hat{\xi}^*, \quad \hat{x} = \rho \hat{x}^*, \quad \sigma \hat{\eta} = \hat{\eta}^*, \quad \hat{\eta}_i = B_i^i \hat{\xi}_i, \\ \hat{x} = |K(\xi)|^{-\frac{1}{4}} \hat{\xi}$$

in meiner Arbeit⁽³⁾, so ergibt sich

$$(3) \quad \frac{\bar{K}(\xi^*)}{\bar{K}(\epsilon^*)} / \frac{\bar{K}(\xi)}{\bar{K}(\epsilon)} = \left(\frac{c}{c^*} \rho \right)^4 = \text{const.} \left(\frac{c}{c^*} \right)^4.$$

Dies ist eine Verallgemeinerung meiner Arbeit.⁽⁴⁾

Weiter kann man es auf SÜSS' Arbeit⁽⁵⁾ anwenden.

II. Setzen wir

$$(1) \quad \hat{\beta}^*(u^1, u^2) = \pm \hat{\xi}(u^1, u^2)$$

und

$$(2) \quad \xi^* - \xi = p h = -p^* h^*$$

- (1) WITT, R.: Eine relativgeo. Erweiterung der affinen Flächentheo.. Compositio Math. Vol. I, Fasciculus 3 (1935), S. 429.
- (2) MATSUMURA, S.: Ueber Flächen und Kurven (XIV), Mem. of the Fac. of the Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ., Vol. XV (1935), p. 252.
- (3) MATSUMURA, S.: Ueber Flächen und Kurven (XV), Mem. of the Fac. of the Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ. Vol. XV (1935), p. 283.
- (4) l. c. (2).
- (5) SÜSS, W.: Kennzeichnende Eigenschaften der mehrdimensionalen Relativsphären und Ellipsoide, Tôhoku Math. Journ. Vol. 30 (1928), p. 90.

so folgt

$$(3) \quad \begin{cases} (\xi^* - \xi) \xi = p = \text{const.}, \\ (\xi - \xi^*) \xi^* = p^* = \text{const.}, \end{cases}$$

weil

$$(4) \quad \xi^* - \xi = a^i \xi_i + p h, \quad h \xi = h^* \xi^* = 1, \quad p \xi^* + p^* \xi = 0$$

bestehen.

(3) ist die Bedingung dafür, dass die Flächen ξ und ξ^* wechselseitig affinparallel⁽⁶⁾ in WITTS Sinn sind.

III. Setzen wir⁽⁷⁾

$$b = 2 \frac{\{(\xi_2 - \xi_1) \hat{\xi}\}}{(\eta_1 \hat{\xi}_1) + (\eta_2 \hat{\xi}_2)}.$$

statt (1) in HIRAKAWAS Arbeit⁽⁸⁾, so folgt

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{Q_1 p_1} + \frac{1}{Q_2 p_2}.$$

Weiter kann man den HIRAKAWAS⁽⁹⁾ Satz 2 beweisen, wo man statt $\eta_1 - \eta_2$, $\eta_1 - \eta_2$ setzt.

Weiter kann man WITTS Arbeit auf meine Arbeit⁽¹⁰⁾ anwenden.

Noch besteht statt (222) in BLASCHKES Buch⁽¹¹⁾

$$p_{ik} du^i du_k = (\gamma_{ik} + a_i \beta_{ik}) du^i du^k.$$

$$(24)$$

Im folgenden definieren wir R-Winkel zwischen ξ_1 und ξ_2 mit

(6) Vergl. SÜSS, W.: Über wechselseitig affinparallele Flächen, Math. Zeit. 34 (1932), S. 158.

(7) l. c. (1).

(8) HIRAKAWA, J.: The affine breadth and its relations to the relative breadth, Japanese Journ. of Math. vol. XII, p. 46.

(9) l. c. (8), p. 47.

(10) MATSUMURA, S.: Ueber Flächen und Kurven (IX), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ. vol. XV, p. 128.

(11) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeo. (1923), S. 173.

$$(1) \quad \sqrt{\phi_1 \phi_2 (\phi_1 - \phi_2)^2},$$

wo ϕ_i Argumente von ξ_i , ϕ_i Argumente von q_i sind.⁽¹⁾

Aus der obigen Definition und HIRAKAWAS Arbeit⁽²⁾ kann man polare Koordinaten folgendermassen definieren:

$$(2) \quad \begin{cases} r(\varphi) = \sqrt{q} \xi, \\ \bar{\varphi} = \sqrt{\bar{\phi}} \varphi \end{cases}$$

wo φ das Argument von ξ und ϕ das von q sind.

Der Inhalt des Dreiecks $\sqrt{q} \xi$, $\sqrt{q} \bar{\xi}$ ist

$$(3) \quad \frac{1}{2} \sqrt{q} \xi \bar{\xi} \sin \{ \sqrt{\phi} \bar{\varphi} - \sqrt{\bar{\phi}} \varphi \}.$$

Man kann die Bedingung für R.-Asymptotenlinien, R.-Wendepunkt, u. s. w. berechnen.

Die kartesischen R.-Koordinaten (x, y) in R_2 sind

$$(4) \quad \begin{cases} x = r(\xi) \cos \bar{\varphi}, \\ y = r(\varphi) \sin \bar{\varphi}. \end{cases}$$

Man kann kartesische R.-Koordinaten im dimensionalen euklidischen Raum berechnen.

Man kann affine R.-Geometrie, nicht euklidische R.-Geometrie oder affine nicht euklidische R.-Geometrie u. s. w. untersuchen.

Nach HIRAKAWA⁽³⁾ kann man wissen, dass

$$(5) \quad d = \sqrt{q} q_2 (\xi_1 - \xi_2)^2$$

R.-Abstand ist.

Wenn ξ_i zwei Kreise sind, die zu einander senkrecht sind, so folgt

$$(6) \quad d^2 = 2q_1 q_2.$$

(1) HIRAKAWA, J.: The Euclidean Relative Differential Geometry, I, Proceedings of the Physico-Math. Society. of Japan, vol. 17 (1935), p. 513.

(2) l. c. (1).

(3) l. c. (1).

Wenn $\hat{\xi}$ ein fester Kreis und ξ_2 ein nicht auf ihm gelegener Kreis ist, so ist

$$(7) \quad \xi_1 = -2(x_2 \hat{\xi}) \hat{\xi} + \xi_2$$

der zu ξ_1 in bezug auf den Kreis $\hat{\xi}$ inverse Kreis.

Aus (5), (7) folgt

$$(8) \quad d = 2 \sqrt{q_1 q_2 (\xi_2 \hat{\xi})}.$$

Die Gleichung des Kreises ist

$$(9) \quad \text{const.} = \sqrt{q_1 q_2 (\xi_1 - \xi_2)^2},$$

$$\text{d. h.} \quad \text{const. } \xi = \text{const.} - \text{const. } \sqrt{q},$$

wo q_2 , ξ_2 die Konstanten, q_1 , ξ_1 die Veränderlichen sind.

Ist die Länge der Gemeinsamtangente der zwei Kreise konstant, so folgt aus (5)

$$(10) \quad d = \text{const. } \sqrt{q_1 q_2},$$

wo $q_1 = q_2$ ist.

Die Gleichung der R.-Konstantenbreitenkurve ist⁽⁴⁾

$$(11) \quad q(\varphi) q(\varphi + \pi) [\{p(\varphi) + p(\varphi + \pi)\}^2 + \{p'(\varphi) + p'(\varphi + \pi)\}^2] = \text{const.}$$

wo φ die Veränderlichen und $p = p(\varphi)$ die Gleichung der ξ ist.

Die Gleichung der R.- π_0 Kurve ist

$$(12) \quad q(\varphi) q(\varphi + \pi) [\{p(\varphi) + p(\varphi + \pi)\}^2 + \{p'(\varphi) + p'(\varphi + \pi)\}^2] = 0.$$

Aus (12) kann man wissen, dass R.- π_0 Kurve nicht weiters als ξ -Kurve ist. π_0 -Kurve oder E(e)-Kurve ist ein Punkt.

$$(13) \quad qq_1 (\xi - \xi_1)^2 = \text{const.}, (q_1, \xi_1 = \text{Konst.})$$

ist die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt auf einer Eilinie liegt.

(4) NAKAJIMA, S.: On some Characteristic Properties of Curves and Surfaces, Tôhoku Math. Journ. 18 (1920), p. 272.

Man kann die Länge der Seite und Diagonale vom konvexen Polygon im relativgeometrischen Sinne berechnen.

Also kann man den Inhalt und Umfang vom konvexen Polygon im relativgeometrischen Sinne berechnen.

Zwei korespondierende Sehnen seien einander gleich, so besteht⁽⁵⁾

$$(14) \quad \xi_1^* - \xi_2^* = \sqrt{q_1 q_2} / \sqrt{q_1^* q_2^*} (\xi_1 - \xi_2).$$

Aus (14) kann man wissen, dass

$$(15) \quad dS^* = q^* \sqrt{(d\xi^*)^2} = q \sqrt{(d\xi)^2} = dS,$$

so folgt der

Satz: *Zwei korespondierende Sehnen seien einander gleich, so sind die Länge von ξ und die von ξ^* einander gleich.*

Man kann beweisen, indem wir die Formeln in WITTS⁽⁶⁾ Arbeit benutzen, den folgenden Satz.⁽⁷⁾

Satz: *Die Relativaffinkugeln sind die einzigen Eiflächen, für die die Punkte*

$$(16) \quad P = \xi + (\rho_1 \rho_2) h$$

in den Gegenpunkten zusammenfallen.

$$(17) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d \mathfrak{M}}{dS}, \quad \frac{dx}{dS} = \cos \mathfrak{M}, \quad \frac{dy}{dS} = \sin \mathfrak{M},$$

wo $1/\rho$ R.-Krümmung, S R.-Kurvenlänge, x, y R.-rechtwinkrige Koordinaten und $\mathfrak{M} = S_0$ R.-Winkel zwischen R.-Radiusvektor und R.-Initiallinie ist.

So hat man den folgenden

Satz: *Ist R.-Krümmung gegeben, so wird Ebenenkurve ausser Translation bestimmt.*

Weiter kann man R.-HOLDITCHS Satz beweisen.

(5) l. c. (1).

(6) (1) in (29).

(7) MATSUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (III), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ. vol. V (1933), p. 299.

Im folgenden mögen wir die Analogie wie in nicht euklidischer Geometrie untersuchen.

Nehmen wir eine Eilinie c , die eine Gerade g in den Punkten ξ_1, ξ_2 trifft.

Sind $\eta_i (i=1, 2)$ zwei Punkte auf g , so kann man setzen

$$(18) \quad \eta_i = (1 - c_i) \xi_1 + c_i \xi_2,$$

wo c_i Parameter sind, so folgt

$$(19) \quad \begin{cases} \bar{\eta}_1 \xi_1 = \frac{1}{c_1} \sqrt{q_1 q_2 (\xi_1 - \eta_1)^2}, & \bar{\xi}_2 \eta_1 = -\frac{1}{1 - c_1} \sqrt{q_1 q_2 (\xi_2 - \eta_1)^2}, \\ \bar{\eta}_2 \xi_2 = -\frac{1}{c_2} \sqrt{q_1 q_2 (\xi_1 - \eta_2)^2}, & \bar{\xi}_2 \eta_2 = \frac{1}{1 - c_2} \sqrt{q_1 q_2 (\xi_2 - \eta_2)^2}. \end{cases}$$

Nehmen wir

$$(20) \quad d_{\eta_1 \eta_2} = \frac{k}{2i} \log (\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2)$$

als Abstand zwischen η_1 und η_2 .

Aus (19), (20) folgt

$$(21) \quad \begin{aligned} d_{\eta_1 \eta_2} &= \frac{k}{2i} \left\{ \log \frac{c_2 (1 - c_1)}{c_1 (1 - c_2)} + \log (\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2) \right\} \\ &= \frac{k}{2i} \left\{ \log \frac{c_2 (1 - c_1)}{c_1 (1 - c_2)} + \log \frac{(\xi_1 - \eta_1)(\xi_2 - \eta_2)}{(\xi_2 - \eta_1)(\xi_1 - \eta_2)} \right\}. \end{aligned}$$

Gleichfalls kann man auch den Winkel betrachten.

Im folgenden mögen wir die Relativedifferentialgeometrie über Summe der Eilinien untersuchen, dann folgt⁽⁸⁾

$$(22) \quad \begin{cases} p = \sum p_i, & q = \sum q_i, \\ \bar{\rho}(\xi) = \sum \bar{\rho}(\xi_i), & \bar{\rho}(c) = \sum \bar{\rho}(c_i), & \xi = \sum \xi_i, & c = \sum c_i, \\ r(\xi) = \frac{\sum p_i(\xi)}{\sum q_i(\xi)}, & \frac{ds}{d\sigma} = \rho = \frac{\sum d\bar{s}(\xi_i)}{\sum ds(c_i)} = \frac{\sum \bar{\rho}(\xi_i)}{\sum \rho(c_i)}, \end{cases}$$

(8.) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeo. I, Jap. Journ. of Math, vol. IV (1927), p. 57.

HAVILAND, E. K.: On the addition of convex curves in Bohr's Theory of Dirichlet Series, American Journ. of Math, vol. LV (1933), p. 332.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2I(\xi) = \oint r ds = \oint r \rho d\sigma \\ \Sigma = \oint d\sigma = 2I(\epsilon) = 2 \sum I(\epsilon_i) = \oint \sum d\sigma_i, \\ S = \oint ds = \oint \rho d\sigma = \oint r d\sigma, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Für R.-Scheitel besteht $\rho' = 0$,

d. h. (23) $\left(\frac{\sum \bar{\rho}(\xi_i)}{\sum \rho(\epsilon_i)} \right)' = 0$, u. s. w..

Setzen wir $i\xi_2$ statt ξ_3 in 5, so folgt

$$(24) \quad d^2 = q_1 q_2 \xi_1^2 \quad \text{oder} \quad d^2 = -q_1 q_2 \xi_2^2, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Setzen wir die Dualenzahl ϵ_{ξ_2} statt ξ_2 in (5), so folgt

$$(25) \quad d^2 = q_1 q_2 \xi_1^2 \quad \text{oder} \quad q_1 q_2 \xi_1 \xi_2 = 0.$$

Man kann

$$\xi, \quad \frac{d\xi}{dS}$$

statt

$$\left(x, y, z = \frac{dy}{dx} \right)$$

in Lies Buch nehmen und studieren.

Es sind

R.-Bernoullische Lemniskate: $\sqrt[4]{q} r = a \sqrt{\cos 2\bar{\varphi}}$,

R.-Kappakurve: $\sqrt[4]{q} r = a \cot \bar{\varphi}$

zu finden, wo a eine Konstante ist.⁽¹⁰⁾

Der Flächeninhalt $= \frac{1}{2} \oint \sqrt[4]{q} r dS = \frac{1}{2} \oint q \sqrt[4]{q} r ds$.

(9) LIE, S. und SCHEFFERS, G.: Geo. der Berührungstransformationen, Leipzig (1896).

(10) Vergl. WIELETTNER, H.: Spezielle Ebene Kurven, Leipzig. 1908.

BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XVI)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, March, 11, 1936)

(1)

Hier Wenden wir uns zu den charakterischen Eigenschaften der Kugel.⁽¹⁾

Satz : *Besteht*

$$(1) \quad p = asH + bs + cH + d, (a > 0, c > 0, d > 0)$$

in Eifläche E, so muss E eine Kugel sein.

Beweis :

$$\begin{aligned} O &= \int p \, dw \\ &= a \int s H \, dw + b \int s \, dw + c \int H \, dw + 4 \pi d \\ &= 2a O + 2b M + cM + 4 \pi d \end{aligned}$$

$$\therefore (2) \quad O(1-2a) = 2bM + cM + 4 \pi d$$

$$\begin{aligned} 3v &= \int p H \, dw \\ &= a \int s H^2 \, dw + b \int s H \, dw + c \int H^2 \, dw + d \int H \, dw \end{aligned}$$

Nach SCHWARZ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int s H^2 \, dw &\geq \frac{(\int s H \, dw)^2}{\int s \, dw} = \frac{2O^2}{M} \\ (\int s H \, dw)^2 &= (\int s^{\frac{1}{2}} H \cdot s^{\frac{1}{2}} \, dw)^2 \\ \int H^2 \, dw &\geq \frac{(\int H \, dw)^2}{4 \pi} = \frac{M^2}{4 \pi} \end{aligned}$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japar, Vol. XVIII, No. 2 May, 1936.]

(1) MATSUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (II), Mem. of the Faculty of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Vol. V, p. 203.

$$\therefore (3) \quad 3v \geq \frac{2aO^2}{M} + 2bO + \frac{cM^2}{4\pi} + dM.$$

Aber

$$O^2 \geq 3vM,$$

so folgt

$$O^2 \geq 3vM \geq 2aO^2 + 2ObOM + c\frac{M^2}{4\pi} + dM^2$$

$$\therefore (4) \quad O^2(1-2a) \geq 2bOM + \frac{cM^2}{4\pi} + dM^2$$

Aus (2) und (4) folgt

$$cOM + 4\pi dO \geq \frac{cM^2}{4\pi} - dM^2$$

$$\therefore cM \left[O - \frac{M^2}{4\pi} \right] + 4\pi d \left[O - \frac{M^2}{4\pi} \right] > 0$$

$$\therefore \left(O - \frac{M^2}{4\pi} \right) (cM + 4\pi d) \geq 0$$

$$\therefore 4\pi O \leq M^2$$

Es gilt das Gleichheitszeichen überall auch in

$$4\pi O = M^2,$$

so dass es sich nach MINKOWSKI um eine Kugel handelt, w. z. b. w.

(2)

Betrachten wir die Kugelscharen

$$(1) \quad \xi^a = p^a \hat{\xi}^a + q^a \eta^a,$$

$$(2) \quad \xi^a = p^a \hat{\xi}^a + q^a \eta^a, \quad [a = I, II],$$

wo p^a , q^a skalare Grössen und ξ^a , $\hat{\xi}^a$, η^a , $\bar{\xi}^a$, $\bar{\eta}^a$ Kugeln in R_3 sind.

Wir betrachten zwei Kreise \mathfrak{K} und $\tilde{\mathfrak{K}}$, die durch die beiden Kugelpaare ξ^a und $\tilde{\xi}^a$ dargestellt sind.

Wir definieren

$$(3) \quad A^{\alpha\beta} = (\chi^\alpha \chi^\beta), \quad \tilde{A}^{\alpha\beta} = (\tilde{\chi}^\alpha \tilde{\chi}^\beta)$$

mit

$$(4) \quad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}, \quad \tilde{A}^{\alpha\beta} = \tilde{A}^{\beta\alpha}, \quad [\beta = I, II]$$

und setzen

$$(5) \quad S^{\alpha\beta} = (\chi^\alpha \tilde{\chi}^\beta)$$

voraus.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(6) \quad \left\| \chi^I, \chi^{II}, \tilde{\chi}^I, \tilde{\chi}^{II} \right\| \equiv 0$$

ist, in dem eine lineare Beziehung der Form

$$(7) \quad \sigma_\alpha \chi^\alpha = \sigma_\lambda \tilde{\chi}^\lambda, \quad \lambda = [I, II],$$

$$\text{d. h.} \quad (8) \quad \sigma_\alpha \{p^\alpha \tilde{\epsilon}^\alpha + q^\alpha \tilde{\eta}^\alpha\} = \sigma_\lambda \{p^\lambda \tilde{\epsilon}^\lambda + q^\lambda \tilde{\eta}^\lambda\}$$

besteht.

Die Bedeutung von (7) ist aber die, dass eine Kugel

$$\mathfrak{g} = \sigma_\alpha \chi^\alpha = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{\chi}^\lambda$$

gilt, auf der beide Kreise liegen.

Wir bilden nun den in α und β symmetrischen Tensor

$$T^{\alpha\beta} = \tilde{A}_{\lambda\mu} S^{\alpha\lambda} S^{\beta\mu} = S^{\alpha,\nu} S^{\beta,\mu};$$

der nur Indizes erster Art trägt.

Es bleibt die Aufgabe übrig, die Invarianten des glechartigen Tensors $A^{\alpha\beta}$, $T^{\alpha\beta}$ zu bestimmen.

Das entspricht aber gerade dem Problem der Invariantenbestimmung zweier quadratischer Form im Gebiet zweier Variabler, wie sie in der Flächentheorie vorkommt.

Der GAUSSschen und mittleren Krümmung entsprechend haben wir die beiden Invarianten

$$K = \frac{T}{A} : H = \frac{1}{2} \cdot T_{\alpha}^{\alpha},$$

wo T die Determinante $|T^{\alpha\beta}|$,

$$T = \frac{S^2}{A}, \quad S = |S^{\alpha\beta}|$$

sind.

Somit hat man auch

$$K = \frac{S^2}{AA}; \quad H = \frac{1}{2} S_{\alpha\lambda} S^{\alpha\lambda}$$

(3)

wir betrachten nun

$$(1) \quad \eta = \xi_1 + i \xi_2 - \xi_3, \quad i = \sqrt{-1},$$

wo $\eta, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ Kugeln in R_3 und ξ_1, ξ_2, ξ_3 zueinander senkrecht sind.

Nehmen wir eine andere Kugel ζ , so folgt

$$(\zeta\eta) = (\zeta\xi_1) + i(\zeta\xi_2) - (\zeta\xi_3)$$

$$\text{d. h.} \quad (2) \quad \cos^2 \varphi = \cos^2 \varphi_1 + i \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3,$$

wo $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die Winkel zwischen $\zeta, \eta; \zeta, \xi_1; \zeta, \xi_2; \zeta, \xi_3$ sind.

Ans (1) ergibt sich

$$(3) \quad (\xi_1\eta) = 1, \quad (\xi_2\eta) = i, \quad (\xi_3\eta) = 1,$$

so folgt der

Satz: η berührt ξ_1 und ξ_3 .

Ist $\hat{\xi}$ eine Kugel und η ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so ist

$$(4) \quad \zeta = 2(\xi_1 + i\xi_2 - \xi_3, \hat{\xi})\hat{\xi} - (\xi_1 + i\xi_2 - \xi_3)$$

die zu η in bezug auf die Kugel $\hat{\xi}$ inverse Kugel.

(4)

Ist $\hat{\xi}_1$ ein Kreis und ζ_1 ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so ist

$$(1) \quad \mathfrak{z}_2 - 2(\mathfrak{z}_1 \hat{\mathfrak{c}}_1) \hat{\mathfrak{c}}_1 - \mathfrak{z}_1$$

der zu \mathfrak{z}_1 in bezug auf den Kreis $\hat{\mathfrak{c}}_1$ inverse Punkt.⁽¹⁾

Ist $\hat{\mathfrak{c}}_2$ ein Kreis und \mathfrak{z}_2 ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so ist

$$(2) \quad \mathfrak{z}_3 = 2(\mathfrak{z}_2 \hat{\mathfrak{c}}_2) \hat{\mathfrak{c}}_2 - \mathfrak{z}_2$$

der zu \mathfrak{z}_2 in bezug auf den Kreis $\hat{\mathfrak{c}}_2$ inverse Punkt.

Aus (1), (2) ergibt sich

$$(3) \quad \mathfrak{z}_3 = -\mathfrak{z}_2 - 2(\mathfrak{z}_1 \hat{\mathfrak{c}}_2) \hat{\mathfrak{c}}_2,$$

wenn $\hat{\mathfrak{c}}_1$ und $\hat{\mathfrak{c}}_2$ zueinander senkrecht sind.

Aus (3) kann man wissen, dasz

$$(4) \quad \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_2 = -2(\mathfrak{z}_1 \hat{\mathfrak{c}}_2) \hat{\mathfrak{c}}_2$$

besteht, wenn $\hat{\mathfrak{c}}_1$ und $\hat{\mathfrak{c}}_2$ zueinander senkrecht sind.

Aus (4) folgt

$$(5) \quad (\mathfrak{z}\mathfrak{z}_3) + (\mathfrak{z}\mathfrak{z}_2) = -(\mathfrak{z}_1 \hat{\mathfrak{c}}_2)(\mathfrak{z} \hat{\mathfrak{c}}_2),$$

wo \mathfrak{z} ein Punkt ist.

Aus (5) folgt

$$(6) \quad (\mathfrak{z}\mathfrak{z}_3) + (\mathfrak{z}\mathfrak{z}_2) = 0,$$

wenn \mathfrak{z} auf $\hat{\mathfrak{c}}_2$ liegt.

Aus (6) ergibt sich

$$(7) \quad (\mathfrak{z}\mathfrak{z}_3) = -(\mathfrak{z}\mathfrak{z}_2).$$

(7) bezeichnet, dasz die Länge zwischen \mathfrak{z} und \mathfrak{z}_3 solcher zwischen \mathfrak{z} und \mathfrak{z}_2 auszer dem Vorzeichen gleich ist.

(5)

Es seien drei Kreise \mathfrak{K} , $\bar{\mathfrak{K}}$, $\overline{\bar{\mathfrak{K}}}$ im R_3 gegeben.

Ist $\mathfrak{y} = \rho_x \mathfrak{x}^x$ eine pormierte Kugel im R_3 durch \mathfrak{K} , so setzen wir

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. ans dem Math. Seminar der Hamb. Univ. N Bd. (1925) p. 122.

$$(1) \quad \eta\eta = \rho_a \rho_a A^{\alpha\beta} = 1.$$

Dann muss sein

$$(2) \quad \begin{cases} \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_a \rho_\beta, \\ \cos^2 \bar{\varphi} = \bar{T}^{\alpha\beta} \rho_a \rho_\beta, \end{cases}$$

wo φ der Winkel zwischen η und $\bar{\mathfrak{R}}$ ist und $\bar{\varphi}$ der zwischen η und $\bar{\mathfrak{R}}$.

Bezeichnet man mit ϕ den Winkel zwischen zwei Tangenten von $\bar{\mathfrak{R}}$ und $\bar{\mathfrak{R}}$ in den korrespondierenden Punkten, so folgt

$$\begin{aligned} (3) \quad \cos^2 \phi &= \cos^2 (\varphi - \bar{\varphi}) = (\cos \varphi \cos \bar{\varphi} + \sin \varphi \sin \bar{\varphi})^2 \\ &= \cos^2 \bar{\varphi} \cos^2 \varphi + \sin^2 \bar{\varphi} \sin^2 \varphi + 2 \cos \varphi \sin \varphi \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \\ &= (T^{\alpha\beta} \rho_a \rho_\beta) (\bar{T}^{\alpha\beta} \rho_a \rho_\beta) + \{ (A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_a \rho_\beta \} \times \\ &\quad \times \{ A^{\alpha\beta} - \bar{T}^{\alpha\beta} \} \rho_a \rho_\beta \\ &\quad + 2 \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_a \rho_\beta} \sqrt{\bar{T}^{\alpha\beta} \rho_a \rho_\beta} \sqrt{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_a \rho_\beta} \\ &\quad \sqrt{(A^{\alpha\beta} - \bar{T}^{\alpha\beta}) \rho_a \rho_\beta}. \end{aligned}$$

Aus (3) kann man ϕ finden.

Wenn $T^{\alpha\beta} = \bar{T}^{\alpha\beta}$, so muss $\bar{\mathfrak{R}}$ zu \mathfrak{R} parallel oder anti-parallel sein.

Die Bedingung für die harmonische Trennung der beiden Elementenpaare (2) ist

$$T^{11} \bar{T}^{22} + T^{22} \bar{T}^{11} - 2 T^{12} \bar{T}^{12} = 0.$$

Es seien zwei Kreise \mathfrak{R} , $\bar{\mathfrak{R}}$ im R_3 gegeben.

Ist

$$(4) \quad \eta = \rho_a k^a$$

eine normierte Kugel durch \mathfrak{R} mit

$$(5) \quad \eta\eta = \rho_a \rho_a A^{\alpha\beta} = 1,$$

so muss

$$(6) \quad \cos^2 \varphi = \rho_a \rho_a T^{\alpha\beta}$$

sein, wo φ der Winkel zwischen η und $\bar{\mathfrak{R}}$ ist.

Es seien zwei Kreise \mathfrak{R}^* , $\bar{\mathfrak{R}}^*$ im R_3 gegeben.

Ist

$$(7) \quad \mathfrak{y}^* = \rho_\alpha^* \mathfrak{x}^{*\alpha}$$

eine normierte Kugel durch \mathfrak{N}^* mit

$$(8) \quad \mathfrak{y}^* \mathfrak{y}^* = \rho_\alpha^* \rho_\beta^* A^{*\alpha\beta} = 1,$$

so muss

$$(9) \quad \cos^2 \varphi^* = \rho_\alpha^* \rho_\beta^* T^{*\alpha\beta}$$

sein, wo φ^* der Winkel zwischen \mathfrak{y}^* und \mathfrak{N}^* ist.

Wenn $\varphi = \rho^*$, so folgt

$$(10) \quad \begin{cases} T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = T^{*\alpha\beta} \rho_\alpha^* \rho_\beta^*, \\ A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = A^{*\alpha\beta} \rho_\alpha^* \rho_\beta^*. \end{cases}$$

Ersetzen wir

$$\rho_\alpha^* = \sum_{\beta=1}^n c_\alpha^\beta \rho_\beta$$

in (10), so folgt

$$(11) \quad \begin{cases} A^{\alpha\beta} = \sum c_\tau^\alpha c_\delta^\beta A^{*\tau\delta}, \\ T^{\alpha\beta} = \sum c_\tau^\alpha c_\delta^\beta T^{*\tau\delta}. \end{cases}$$

Also besteht (5) in unsrem Falle.

Ist \mathfrak{y} ein Punkt in (4), so folgt

$$(12) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha(t) \rho_\beta(t),$$

wo

$$(13) \quad A^{\alpha\beta} \rho_\alpha(t) \rho_\beta(t) = 0.$$

Aus (12), (13) ergibt sich

$$(14) \quad \cos^2 \varphi = (A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha(t) \rho_\beta(t).$$

Bezeichnen wir Ableitungen längs der Kugelschar \mathfrak{y} durch ∂ , so muss

$$(15) \quad \sum A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \frac{\partial \rho_\beta}{\partial t} = 0$$

für $\frac{\partial \rho_\beta}{\partial t}$ erfüllt sein.⁽¹⁾

φ in (14) ist der Winkel zwischen dem Punkt η und dem Kreis \Re , wo (15) besteht.

Sind η , η^* zwei Punkte in (4), (7), so werden erfüllt:

$$(16) \quad \begin{cases} \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta, & \cos^2 \varphi^* = T^{*\alpha\beta} \rho_\alpha^* \rho_\beta^*, \\ A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = 0, & A^{*\alpha\beta} \rho_\alpha^* \rho_\beta^* = 0. \end{cases}$$

Ist

$$(17) \quad \rho = \sum_\alpha \rho_\alpha \eta^\alpha \pm \sum_\lambda \rho_\lambda^* \eta^{*\lambda}$$

ein Punkt, so müssen, wie man an (16) leicht erkennt, η und η^* miteinander zusammenfallen.

$$(18) \quad \mathfrak{z} = \sum_\alpha \rho_\alpha \xi^\alpha, \quad \bar{\mathfrak{z}} = \sum_\lambda \bar{\rho}_\lambda \bar{\xi}^\lambda, \quad [\alpha, \lambda = \text{I, II, III}]$$

zeigen zwei Punktepaaire, so

$$(19) \quad \sum_{\alpha, \beta} A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = 0, \quad \sum_{\lambda, \mu} A^{\lambda\mu} \bar{\rho}_\lambda \bar{\rho}_\mu = 0.$$

Nehmen wir \mathfrak{z} , $\bar{\mathfrak{z}}$ als Funktionen von u und v , so haben wir vier zweiparametrische Mannigfaltigkeiten von Flächenelementen $\{\mathfrak{z}(u, v), \bar{\mathfrak{z}}(u, v)\}$, wo u, v Parameter sind.

Sind die Streifenbedingungen

$$(20) \quad \mathfrak{z} \bar{\mathfrak{z}}_u = \bar{\mathfrak{z}} \mathfrak{z}_v = 0$$

erfüllt, so folgt

$$(21) \quad \sum_{\alpha, \lambda} \rho_\alpha \bar{\rho}_\lambda U^{\alpha\lambda} = 0, \quad \sum_{\alpha, \lambda} \rho_\alpha^* \bar{\rho}_\lambda^* V^{\alpha\lambda} = 0,$$

wo

$$(22) \quad \begin{cases} U^{\alpha\lambda} = (\xi_\alpha^\alpha \bar{\xi}^\lambda) = -(\xi_\alpha^\alpha \bar{\xi}^\lambda). \\ V^{\alpha\lambda} = (\xi_\alpha^\alpha \bar{\xi}^\lambda) = -(\xi_\alpha^\alpha \bar{\xi}^\lambda). \end{cases}$$

Aus (19) und (21) kann man finden vier Verhältnissgrößen

(1) BLASCHKE, W.: Differentialgeometrie III (1929), S. 435.

$\rho_I : \rho_{II} : \rho_{III}$ und $\bar{\rho}_I : \bar{\rho}_{II} : \bar{\rho}_{III}$, d. h. acht Systeme von Lösungen, die aber nicht alle reell zu sein brauchen.

Betrachten wir

$$\cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

wieder. Wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so folgt

$$(1) \quad \rho^2 = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = 0.$$

Wir setzen

$$(2) \quad \rho^2 = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \equiv (\hat{x}^\alpha \rho_\alpha) (\hat{x}^\beta \rho_\beta).$$

Betrachten wir die Vektoren

$$a = \hat{x}^\alpha c_\alpha, \quad b = \hat{x}^\beta c_\beta,$$

so wird das skalare Produkt

$$ab = (\hat{x}^\alpha c_\alpha) (\hat{x}^\beta c_\beta) = T^{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta = T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta},$$

wo

$$g_{\alpha\beta} = c_\alpha c_\beta.$$

Aus der identischen Gleichung (2) folgt

$$\hat{x}^1 \hat{x}^1 = T^{11}, \quad 2 \hat{x}^1 \hat{x}^2 = T^{12}, \quad \hat{x}^2 \hat{x}^2 = T^{22}.$$

Also ergibt sich

$$T^{22} t^2 - 2 T^{12} t + T^{11} = 0,$$

weil (1) einen festen Wert hat, wo $t = \hat{x}^1 / \hat{x}^2$.

Ist

$$(3) \quad T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = 0,$$

so ist jeder Vektor a zu jedem Vektor b orthogonal.

Ein Tensor $T^{\alpha\beta}$, der gegenüber dem Grundtensor $g_{\alpha\beta}$ in der Beziehung (3) steht, heisst „apolar“ zu $g_{\alpha\beta}$.

Wenn $T^{\alpha\beta}$ ein Tensor ist, der Bedingung (2) genügt und

$$T^{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$$

auch ein Tensor im kovarianten Koordinatensystem $e_i e_k$ ist, muß auch die Gleichung

$$T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = 0$$

erfüllt sein.

Drei Tensoren T^{ik} , τ_{λ}^i , $\tau_{\lambda\mu}$ sind einander gleich, wenn die Gleichungen

$$T^{ik} \rho_i \rho_k = c, \quad T_{\lambda}^i \rho_i \rho^{\lambda} = c, \quad T_{\lambda\mu} \rho^{\lambda} \rho^{\mu} = c$$

dieselbe Reziprozität definieren.

Setzt man mit Hilfe von

$$\rho^i = g^{ik} \rho_k, \quad \rho_k = g_{ik} \rho^i$$

die Werte von ρ_i , ρ_k in diese Gleichungen ein, so folgt durch Koeffizientenvergleich sofort:

$$(1) \quad \begin{cases} T^{ik} = g^{i\lambda} T_{\lambda}^k = g^{i\lambda} g^{k\mu} T_{\lambda\mu}, \\ T_k^i = g_{\lambda k} T^{ik} = g^{\mu i} T_{\lambda\mu}, \\ T_{\lambda\mu} = g_{\lambda i} g_{\mu k} T^{ik} = g^{i\mu} T_{\lambda}^i. \end{cases}$$

Die Formeln (1) gestatten, für denselben Tensor in seinen drei Darstellungsformen die Determinanten in Beziehung zueinander auszurechnen.

Aus (12) ergibt sich

$$\tan \varphi = \int \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \int \frac{d\varphi}{T^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta}},$$

aber

$$\tan \varphi = \sqrt{\frac{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_{\alpha} \rho_{\beta}}{T^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta}}}$$

so folgt

$$\left\{ \int \frac{d\varphi}{T^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta}} \right\}^2 = \frac{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_{\alpha} \rho_{\beta}}{T^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta}}.$$

Weiter gelten

$$\sin \varphi = \int \cos \varphi d\varphi = \int \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta}} d\varphi = \sqrt{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_{\alpha} \rho_{\beta}},$$

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \int (T^{\alpha\beta} - A^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta d\varphi = \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta}, \\ \int \tan \varphi d\varphi &= \int \sqrt{\frac{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta}{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta}} d\varphi = -\log \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta}, \\ \int \frac{1}{\tan \varphi} d\varphi &= \int \frac{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta}{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} d\varphi = \log \sqrt{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta},\end{aligned}$$

u. s. w. .

Wenn

$$(1) \quad \cos^2 \varphi + \cos^2 \bar{\varphi} = 0$$

besteht, so folgt

$$(2) \quad T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta + \bar{T}^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta = 0,$$

d. h.

$$(3) \quad \chi = \rho_\alpha \dot{\xi}^\alpha + \rho_\beta \dot{\xi}^\beta,$$

wo $\rho_\alpha \dot{\xi}^\alpha$ und $\rho_\beta \dot{\xi}^\beta$ zueinander senkrecht sind. χ bedeutet einen Punkt.

Betrachten wir

$$T^{rs} \rho_r \rho_s = 0$$

und

$$R^{rs} \rho_r \rho_s = 0,$$

so folgt

$$(P; P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{T^{rs} \rho_r \rho_s}{R^{rs} \rho_r \rho_s} \cdot \frac{R^{11} R^{22} - (R^{12})^2}{T^{11} T^{22} - (T^{12})^2},$$

wo

$$(P; P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\rho^{(1)} - \rho}{\rho^{(3)} - \rho} \cdot \frac{\rho^{(2)} - \rho}{\rho^{(4)} - \rho} \cdot \frac{\rho^{(3)} - \rho^{(4)}}{\rho^{(1)} - \rho^{(2)}}$$

ist.

(6)

Wir betrachten⁽¹⁾ uns nun

- (1) THOMSEN, G: Bericht über differentialgeo. Untersuchungen zur Kugelgeo. Jahresber. der D. M. V. 38, S. 99.

$$(1) \quad G = \frac{(ub)(ff)}{(uf)(bf)},$$

so folgt

$$(2) \quad G = 2 \sqrt{\left\{1 + \frac{(u'b)}{(ub)}\right\}},$$

wo u' der zu u in bezug auf die Kugel f inverse Punkt ist.

Sind φ konstant, b ein fester Punkt⁽²⁾ und f eine feste Kugel, so ergibt sich aus (2)

$$(3) \quad (u'b) : (ub) = \text{const.}$$

Aus (3) folgt der

Satz: In unserem Falle besteht (3), wo (ub) die Länge zwischen zwei Punkten u und b , $(u'b)$ die Länge zwischen zwei Punkten u' und b bedeutet.

Ist f eine Kugel und b ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so ist

$$(4) \quad b' = 2(bf)f - b$$

der zu b in bezug auf die Kugel f inverse Punkt.

Aus (4) folgt

$$(5) \quad (ub') = 2(bf)(uf) - (ub).$$

Aus (1), (5) ergibt sich

$$(6) \quad G = 2 \sqrt{\left\{1 + \frac{(ub')}{(ub)}\right\}}.$$

Ist φ konstant und f die feste Kugel, so folgt aus (6)

$$(ub) : (ub') = \text{const.}$$

Wenn $G=0$ in (1) ist, so müssen u und b miteinander zusammenfallen.

Weiter

$$G = \sqrt{\frac{J_3}{J_1 J_2}},$$

(2) 1. c. (2).

wo

$$J_1 = \frac{(vt)^2}{(vb)(tf)}, \quad J_2 = \frac{(tu)^2}{(tf)(uu)}, \quad J_3 = \frac{(ub)^2}{(uu)(vb)}.$$

(7)

Im folgenden möchten wir die ebene Kreisgeometrie behandeln. Haben wir nämlich einen festen Kreis r und einen Kreis ξ , der den ersteren in zwei reellen Punkten v^I und v^{II} schneidet, so ist durch

$$(1) \quad \bar{t} = (rr)\xi + (\xi r)r$$

wegen

$$(2) \quad (tr) = 2(\xi r)$$

der durch v^I und v^{II} hindurchgehende Büschel dargestellt, der den festen Kreis r mit dem Winkel φ schneidet, wo

$$(3) \quad \cos^2 \varphi = 2 \cos^2 \phi$$

und ϕ der Winkel zwischen ξ und r ist.

Nun betrachten wir⁽¹⁾

$$(4) \quad t = (rr)\xi - (\xi r)r.$$

Aus (1), (4) folgt

$$(5) \quad (\bar{t}t) = 1 - (\xi r)^2,$$

$$\text{d. h.} \quad (6) \quad \cos^2 \psi = 1 - \cos^2 \phi,$$

wo ψ der Winkel zwischen \bar{t} und t ist.

Wenn $t = \bar{t}$, so ergibt sich aus (1) und (4)

$$(\xi r)r = 0,$$

d. h. *muss ξ und r mit einander senkrecht sein.*

(1) BLASCHKE, W.: Differentialgeo. III (1929), S. 85.

(8)

$$(1) \quad v = \sum \tau_a x^a$$

ist ein Punkt.

$$(2) \quad u = \sum \sigma_a x^a$$

ein Punkt oder eine Kugel in R_3 und

$$(3) \quad r = \sum c_a x^a, \quad x^a$$

Kugeln in R_3 , wo

$$(4) \quad \begin{cases} A^{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta = 0, \text{ oder } = 1. \\ A^{\alpha\beta} \tau_\alpha \tau_\beta = 0, \quad A^{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta \neq 0, \quad [\alpha, \beta = I, II] \end{cases}$$

und r eine feste Kugel ist.

Wir betrachten einen Invariant

$$(5) \quad J = \frac{(uv)}{(ur)(vr)} = \frac{\sum A^{\alpha\beta} \sigma_\alpha \tau_\beta}{(\sum A^{\alpha\beta} \sigma_\alpha c_\beta)(\sum A^{\alpha\beta} \tau_\alpha c_\beta)},$$

wo

$$(6) \quad (ru) = \sum A^{\alpha\beta} \sigma_\alpha c_\beta$$

ist.

Wir möchten J zu einem Extremum machen unter Nebenbedingung⁽¹⁾

$$(7) \quad \sum A^{\alpha\beta} \tau_\alpha \tau_\beta = 0.$$

Wir haben also für den Ausdruck

$$(8) \quad F = J + \lambda \sum A^{\alpha\beta} \tau_\alpha \tau_\beta,$$

wo λ ein EULERScher Multiplikator ist, die Gleichung

$$(9) \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_\alpha} = 0$$

zu bilden, so folgt

$$(10) \quad 2 : [\sum A^{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta].$$

(1) BLASCHKE, W.: Differentialgeometrie, III, (1929), S. 249.

(9)

Betrachten wir zwei Kugelbüscheln

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_1 + \lambda x_2, \\ y = y_1 + \lambda y_2 \end{cases}$$

in R_3 , so kann man mit

$$(2) \quad f(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2) \equiv f(x, y) = 0$$

die Kreisfläche darstellen, wo x_i, y_i die Kugeln in R_3 sind.

Aus (2) folgt⁽¹⁾

$$(3) \quad 0 = f(x_1, y_1) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} x_2 + \frac{\partial f}{\partial y} y_2 \right) + \frac{\lambda^2}{1.2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y_2^2 \right) + \dots + \lambda^n f(x_2, y_2).$$

Wenn der Kreis $\{x_1, y_1\}$ zu der Kreisfläche (2) gehört, so folgt

$$(4) \quad f(x_1, y_1) = 0.$$

Weiter

$$(5) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} x_2 + \frac{\partial f}{\partial y} y_2 \right) = 0,$$

so folgt

$$(6) \quad \lambda^2 = 0,$$

also ergibt sich aus (1)

$$(x_1, x_2) = 0, \quad (y_1, y_2) = 0,$$

d. h. x_1, y_1 sind senkrecht zu x_2 bzw. y_2 .

(10)

Aus (30) in THOMSENS Arbeit⁽²⁾ ergibt sich

- (1) NISHIUCHI, T.: Theory of plane algebraic Curves, Zoku Bankin Koto Suguaku Koza, Tokyo, Kyorizusha, 1930.
- (2) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. ans dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd. 1925.

$$(1) \quad -c \hat{\xi}_{oo} \hat{\xi}_o = -\hat{\xi} \bar{v}_o + c \bar{v} \bar{v}_o + \bar{c} v v_o.$$

Ist v ein fester Punkt, so folgt aus (1)

$$-c \hat{\xi}_o \hat{\xi}_{oo} = 0,$$

d. h. $(\hat{\xi}_o^2)_o = 0,$

oder $(2) \quad \hat{\xi} = c_1 \sigma + c_2,$

wo c_i Konstanten sind, so folgt der

Satz: Wenn v ein fester Punkt ist, so besteht (2).

Eliminierten wir c, \bar{c} aus (30), so folgt

$$(3) \quad \hat{\xi}_o^2 + \hat{\xi} + 2 v \bar{v} = \text{const.}$$

(3) ist die Bedingung die zwischen $\hat{\xi}, v$ und \bar{v} bestehen musz,

Aus (56) in THOMSENS Arbeit⁽²⁾ ergibt sich

$$(u \hat{\xi}'') = -ad, \quad (u' \zeta') = 0, \quad (u' \bar{u}') = dd,$$

$$(\bar{u}' \zeta') = 0,$$

daraus folgt der

Satz: ζ' ist senkrecht zu u' und \bar{u}' .

(11)

Betrachten wir zwei Kugelscharen $x(t), y(t)$ in R_3 , so sind

$$(1) \quad x + \dot{x} dt, \quad y + \dot{y} dt$$

zwei benachbarte Kugeln von x bzw. y .

Wenn (1) einer Kugel z gleich ist, so folgt

$$(2) \quad z = x + \dot{x} dt = y + \dot{y} dt.$$

Ist φ der Winkel zwischen $z - x$ und $y - x$, so folgt

$$(3) \quad \cos^2 \varphi = (z - x, y - x) = (\dot{x} dt, y - x)$$

$$= \{\dot{x} dt, (\dot{x} - \dot{y}) dt\} = \frac{\{\dot{x} dt, (\dot{x} - \dot{y}) dt\} (y - x, \dot{y})}{(\dot{x} dt, \dot{y})},$$

weil

$$(\dot{x} dt, \dot{y}) = (y - x, \dot{y}),$$

wenn

$$(\dot{y} \dot{y}) = 0.$$

Wenn $(\dot{x} \dot{x}) = 0$, so folgt aus (3)

$$(4) \quad \cos^2 \varphi = (x - y, \dot{y}) dt.$$

Also ergibt der

Satz: Wenn konsekutive Kugeln von x und y sich berühren, so besteht (4).

Wenn $\sigma = \frac{\pi}{2}$, so folgt

$$(x \dot{y}) = (y \dot{y}).$$

Ist ϕ der Winkel zwischen $\dot{y} - \dot{x}$ und \dot{y} , so folgt

$$\cos^2 \phi = (\dot{y} - \dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x} dt, \dot{y} dt) = (\dot{x} \dot{y}) dt^2$$

(12)

Der Kreis $\xi(t)$ ist der Schmiegkreis der Kurve $\dot{\xi}(t)$.

$$(1) \quad \dot{y} = 2(\xi \dot{\xi}) \xi - \dot{\xi}$$

ist der zu $\dot{\xi}$ in bezug auf ξ inverse Punkt.⁽¹⁾

Aus (1) ergibt sich (2) $\dot{y} = -\dot{\xi}$, daraus folgt

$$(2) \quad (\dot{y} \dot{\xi}) = 0$$

und

$$(3) \quad (\xi \dot{y}) = 0,$$

so ist \dot{y} die Schmiegkurve von $\dot{\xi}(t)$.

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Univ, IV Bd. (1925), S. 126.

Wenn der Kreis $\mathfrak{z}(t)$ der Schmiegkreise der Kurve $\dot{\mathfrak{z}}(t)$ und die Tangentenentfernung⁽²⁾ zwischen ξ und \mathfrak{z} konstant ist, so folgt

$$(4) \quad (\xi - \mathfrak{z})^2 = \text{const.},$$

d. h. $(5) \quad (\xi - \mathfrak{z})(\dot{\xi} - \dot{\mathfrak{z}}) = 0$

Ist die Länge zwischen zwei Punkten ξ und \mathfrak{z} konstant, so folgt

$$(6) \quad (\dot{\xi} - \dot{\mathfrak{z}})^2 = \text{const.},$$

d. h. $(7) \quad (\xi - \mathfrak{z})(\ddot{\xi} - \ddot{\mathfrak{z}}) = 0.$

Aus (5), (8) kann man wissen, dass

$$(\xi - \mathfrak{z}) // (\ddot{\xi} - \ddot{\mathfrak{z}}).$$

also

$$(\dot{\xi} - \dot{\mathfrak{z}})(\dot{\xi} - \dot{\mathfrak{z}}) = 0, \quad (\xi - \mathfrak{z})(\ddot{\xi} - \ddot{\mathfrak{z}}) = 0.$$

$\xi - \mathfrak{z}$ geht also durch drei konsekutive Punkte der Kurve $\dot{\xi} - \dot{\mathfrak{z}}$.

Ist $d\psi$ ein unendlich kleiner Winkel zwischen η und deren Nachbarkugel $\eta + \dot{\eta} dt$, so besteht

$$(8) \quad \tan^2 d\psi = d\psi^2 = d\sigma^2.$$

wo

$$(9) \quad \sigma = \pm \int_{t_0}^{t_1} (1 + \varepsilon) \sqrt{(\dot{x} + i\dot{y}, \dot{x} + i\dot{y})} dt.$$

Weiter kann man FRENET-Formeln suchen.⁽³⁾

(13)

Betrachten wir

$$(1) \quad \eta = (1 + \varepsilon)\xi + i(1 + \varepsilon)\mathfrak{z},$$

wo ξ, η, \mathfrak{z} die Kugeln sind und $\varepsilon^2 = 0, i = \sqrt{-1}$.

Aus (1) ergibt sich⁽¹⁾

(2) BLASCHKE, W.: Über die Geo. von LAGUERRE, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Univ. IV Bd. (1925), S. 203.

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Univ. IV Bd. (1925), S. 140.

$$(2) \quad \eta = (1 + \varepsilon) \{x + i z\},$$

daraus folgt.

$$\eta^2 = (1 + \varepsilon)^2 \{2i(xz)\},$$

$$\text{d. h.} \quad 1 = (1 + 2\varepsilon) 2i(xz)$$

$$\therefore \quad (xz) = \frac{1}{2i(1 + 2\varepsilon)},$$

$$(3) \quad \cos^2 \phi = \frac{1}{2i(1 + 2\varepsilon)},$$

wo ϕ der Winkel zwischen x und z ist.

Ist z eine Kugel und η eine nicht auf ihm gelegene Kugel, so ist

$$\begin{aligned} (4) \quad \eta &= 2 \{ (1 + \varepsilon)(x + iz), x \} x - (1 + \varepsilon)(x + iz) \\ &= 2 \{ (1 + \varepsilon)(1 + iz) \} x - (1 + \varepsilon)(x + iz) \\ &= 2 \left\{ (1 + \varepsilon) \left(1 + \frac{1}{2(1 + 2\varepsilon)} \right) \right\} x - (1 + \varepsilon)(x + iz) \\ &= \left\{ 2(1 + \varepsilon) \left(1 + \frac{1}{2(1 + 2\varepsilon)} \right) - (1 + \varepsilon) \right\} x - (1 + \varepsilon) iz \end{aligned}$$

die zu η in bezug auf den x inverse Kugel.

$$(14)$$

Betrachten wir den Büschel der linearen Kugelkomplexe

$$p^\alpha \xi^\alpha + q^\beta x^\beta \quad [\alpha, \beta = I, II]$$

und die beiden Kugeln k_1^α und k_2^β in ihm, welche den Lösungen $p^\alpha : q^\beta$ der Gleichung

$$(p^\alpha \xi^\alpha + q^\beta x^\beta, p^\alpha \xi^\alpha + q^\beta x^\beta) = 0$$

entsprechen, so ergeben sich als nächstliegende kugelgeometrische Verallgemeinerungen

$$\frac{1}{2i} \log (k_1^\alpha, k_2^\beta, \xi^\alpha, x^\beta)$$

höhere kugelgeometrische Distanz [„H-Distanz“ (ξ^a, ξ^b)],

$$-\frac{k}{2i} \log (k_1^{a,b}, k_2^{a,b}, \xi^a, \xi^b)$$

höherer kugelgeometrischer Winkel [„H-Winkel“ (ξ^a, ξ^b)].

Zu weiteren neuen und Analogiebegriffen führt die Theorie der „H-Krümmungen“, „H-Torsionen“, „H-Ausdehnungsmasse“ u. s. w. wie in TAKASUS Arbeit.⁽¹⁾

Weiter kann man untersuchen wie in TAKASUS Arbeit.⁽²⁾

(15)

Die Bedingung dafür, dass sich zwei zueinander senkrechte Kugelbüschel $\eta^a, \bar{\eta}^\lambda$ in R_3 in einem Punkt berühren, ist

$$0 = \sum_{a, b} A^{ab} \rho_a \rho_b + \sum_{\lambda, \mu} \bar{A}^{\lambda\mu} \bar{\rho}_\lambda \bar{\rho}_\mu,$$

$$r = \sum_a \rho_a \eta^a + \sum_\lambda \bar{\rho}_\lambda \bar{\eta}^\lambda, \quad [a, \lambda = I, II]$$

die Kugeln in R_3 sind, die durch den Schnittkreis von η^a und $\bar{\eta}^\lambda$ gehen.

Gleichfalls bestehen für $(n-1)$ zueinander senkrechte Kugelbüschel

$$\xi_1^a, \xi_2^a, \dots, \xi_{n-1}^a \quad [a, \lambda, \dots, v = I, II]$$

in R_n .

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit.⁽³⁾

(16)

Setzen wir⁽⁴⁾

- (1) TAKASU, T.: Über kugelgeometrische Verallgemeinerungen der nichteuklidischen Differentialgeometrie I, Science Reports Tôhoku Univ. 15, p. 273-301.
- (2) l. c. (1).
- (3) NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBINS, Mem. of Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ., Vol. II, p. 6.
- (4) Vergl. (5).

$$(1) \quad \begin{cases} \cos^2 \varphi = T^{11} \rho_1^2 + 2T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2, \\ \cos^2 \bar{\varphi} = T^{11} \rho_1^2 + 2T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2, \\ J = (T^{11} \rho_1 + T^{12} \rho_2)(T^{12} \rho_1 + T^{22} \rho_2) \\ \quad - (T^{22} \rho_1 + T^{11} \rho_2)(T^{11} \rho_1 + T^{12} \rho_2), \\ D = T^{11} T^{22} - (T^{12})^2, \quad D' = T^{11} T^{22} - (T^{12})^2, \\ I = T^{11} T^{22} - 2T^{12} T^{12} + T^{12} T^{11}, \end{cases}$$

so bestent

$$(2) \quad J^2 = \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \bar{\varphi} - \cos^4 \varphi \cdot D' - \cos^4 \bar{\varphi} \cdot D.$$

Dies ist eine Bedingung für J.

Wenn $D = D' = 1$, so besteht aus (2)

$$(3) \quad \begin{aligned} J^2 &= \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \bar{\varphi} - \cos^4 \varphi - \cos^4 \bar{\varphi} \\ &= -(\cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \bar{\varphi})^2 - (\cos^2 \varphi - \cos^2 \bar{\varphi})^2. \end{aligned}$$

Aus (3) kann man wissen, dass J imaginär ist.

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit.⁽²⁾

(17)

Die Minimallinie auf einer Kreisfläche ist

$$(1) \quad (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0.$$

Man kann (1) in die Form

$$(2) \quad d\varphi^2 + d\psi^2 = 0$$

einsetzen, wo⁽¹⁾

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0,$$

d. h.

(2) I. c. (3) in (15).

(1) Vergl. PICARD, E.: Journal de Mathématiques, 1896 oder PICARD, Traité L'analyse, III, p. 655.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\theta_i \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}} \right\} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{(\theta_i \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\theta_i \theta_i) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}} \right\} \\
 \frac{\partial \psi}{\partial t} &= - \frac{(\theta_i \theta_i) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_i \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}} \\
 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\theta_i \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}}
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{(\theta_i \theta_i) \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - (\theta_i \theta_\tau) \frac{\partial \psi}{\partial t}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}}, \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} &= - \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \psi}{\partial t} - (\theta_i \theta_\tau) \frac{\partial \psi}{\partial \tau}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}}
 \end{aligned}$$

d. h.

$$\Delta_2 \psi = 0,$$

$$\Delta_1(\varphi, \psi) = 0, \quad \Delta_1 \varphi = \Delta_1 \psi.$$

Experimental Studies on the Artificial Transmutation of Certain Light Elements Bombarded by Ions of Hydrogen and Heavy Hydrogen. I.*

(The Relative Probability of the Occurrence of the Two Alternative Types of Disintegration of ${}_3\text{Li}^6$ and of ${}_6\text{B}^{11}$)

(Accepted for publication, May 20, 1936)

B. ARAKATSU, K. KIMURA and Y. UEMURA.

I. Introduction.

The phenomena of Radioactivity had led us to believe in the occurrence of the spontaneous transmutations of atoms of some heavy elements into those of others, and hence the dynamical constitutions from elementary particles of atomic nuclei that may become unstable in course of time.

The accurate, electro-magnetic weighing of each atom by the method of positive ray analysis revealed the so called "whole number rule" that held good throughout the isotopes of all of the elements; the small deviations from this rule were taken as due to the different "packing effects" for the different constitutions of various atomic nuclei, and thus the mass m of the elementary particle of the construction was taken as decreased by being bound together by an amount calculated by the relativistic energy-mass relation

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2},$$

* Parts of the present paper were read at the meetings of the Japanese Association for the Advancement of Science held on December 24, (1934) and the Physico-Mathematical Society of Japan held on April 5, (1935) and April 4, (1936) respectively.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. XVIII, No. 3 July, 1936.]

where $\triangle E$ is the mean binding energy of the particles building the atom under consideration and may amount to the order of magnitude of some million electron volts (M. E. V.).

It was then natural to predict that the nucleus of an atom can be artificially disintegrated into pieces if we are able to impart sufficient energy to the constitution of the nucleus to destroy the union of the elementary, constituent particles, and especially that some of the light elements are relatively unstable and may easily be disintegrated by some means. The old experiments of RUTHERFORD and CHADWICK on the artificial disintegration of atoms of nitrogen and other light elements were undertaken by bombarding them with α -particles possessing high energies, and it was observed that a proton was ejected when the colliding α -particle happened to be captured by one of the atoms of the bombarded elements.²⁾

This experiment, not only directly proved the existence of the proton as one of the building materials of atomic nuclei, but also, combined with the phenomena of anomalous scattering, led us to suggest that atomic nuclei carry in general a potential "hole" inside the "barrier" due to the Coulombian repulsion against the incoming α -particle, which may, according to classical mechanics, be considered to be captured when and only when the kinetic energy is sufficiently large as to be capable of surmounting the barrier, the process of disintegration being taken as one of the types of the liberation of energy due to the rearrangement of the configuration. According to the view of Wave-mechanics, however, it was predicted that a particle should be allowed to penetrate the barrier with a finite probability even though the kinetic energy is lower than the value corresponding to the maximum potential of the barrier.³⁾

The disintegration of atomic nuclei by bombarding them with high speed ions of entirely artificial origin was first achieved by COCKCROFT and WALTON⁴⁾ and the prediction of Wave-mechanics was experimentally realised; namely that the accelerated positive rays of hydrogen of 100,000 E. V. or even of 20,000 E. V.^{3,4)} were sufficient of themselves to disintegrate the nucleus of a lithium atom (${}^6\text{Li}$)

with measurable probability while the height of the potential barrier of this isotope against a proton was estimated to be about 0.8 M.E.V.⁶⁾

Considerable work was subsequently done by many investigators in this field of research and a number of results were produced in the past few years.

Experimental studies on this subject have also been undertaken during the last two years in the physical laboratory of Taihoku Imperial University, and the relative probabilities of alternative types of disintegration of various light elements have been observed for the bombarding ions at relatively slow velocities.

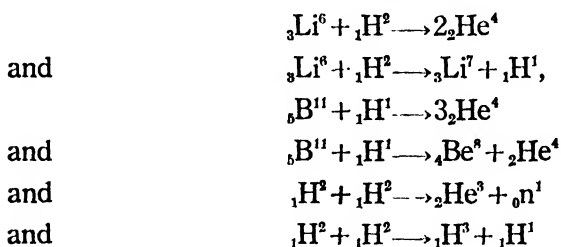
II. General Consideration.

It is generally believed⁶⁾ that the probability that a high speed particle will produce a disintegration of atomic nucleus on striking a target depends on

- 1) the effective nuclear collision cross-section that varies with (the square of the) varying de Broglie wave-length of the particle,
- 2) the range of the particle in the target,
- 3) the Wave-mechanical probability of the particle penetrating the nuclear potential barrier, (this chance reaches the unit when the kinetic energy of the particle exceeds the value of the potential barrier), and
- 4) the probability that disintegration will occur after penetration of the potential barrier has taken place. This may be considered to depend on the amount of the available energy, on the spin and angular momentum relations among the different nuclear particles relating the disintegration process, and on the chance of the particles escaping through the potential barrier.

The relative probability of different types of disintegration occurring on the bombardment by particles of the same kind the factor 2) is evidently indifferent. If the colliding particle is a proton, factors 1) and 3) are also ineffective. For cases of colliding deutons, however, the matters seem sometimes to become very complicated.

In order to find, if possible, any prevailing law that may control the probability of disintegration, it seems convenient to observe the relative yield of disintegrations of different features caused by bombardment with particles of one kind, such as, for example,



etc. respectively.

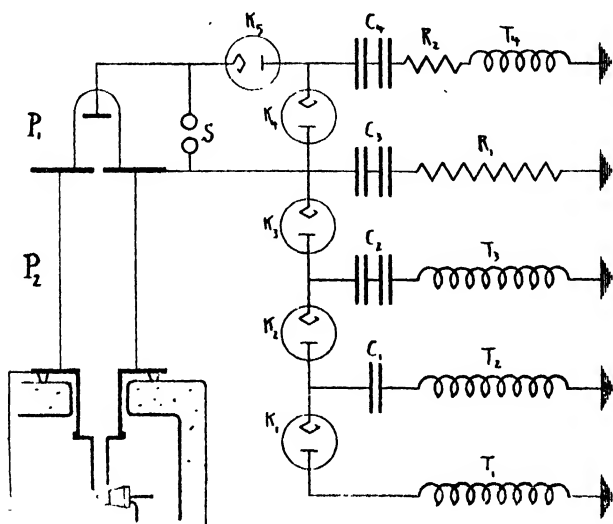
III. Experimental Procedure.

a) The High Tension Apparatus.

A compact source of high tension static voltage has been devised by using a system of kenotrons and condensers connected to a set of three equally constructed 60 K. V. X-ray transformers. (Fig. 1.)

The transformers T_1 and T_2 , the voltage of which may be independently regulated by a set of controlling autotransformers, are

Fig. 1.



excited in the opposite phase so that the voltage of the rectified side of the condenser C_1 comes, in a duration of time, to oscillate between V_1 and V_1+2V_2 where V_1 and V_2 are the maximum voltages of the transformers T_1 and T_2 respectively.

Since the kenotrons obtainable on the market can only endure, at most, up to a voltage difference of about 240,000 volts, the maximum value of V_1+2V_2 should not exceed 180,000 volts because, in the case of $V_1=V_2=60,000$ volts, the voltage of the transformer T_1 takes just the minimum value $-60,000$ volts while that of the condenser C_1 reaches then its maximum value of 180,000 volts.

So long as the transformers T_3 and T_1 are not in operation, all of the condensers C_2 , C_3 and C_1 are charged by means of the kenotrons K_2 , K_3 and K_1 up to this potential. When, however, T_3 is excited by A. C., just in the opposite phase to T_2 , (i. e. in the same phase with T_1), the potential of the rectified side of the condenser C_2 alternates between 180,000 volts and 300,000 volts. The latter voltage is the highest limit obtainable, since the potential of C_1 takes the minimum value $+60,000$ volts when that of C_2 is 300,000 volts, which is the limit of the endurable voltage-difference of the kenotrons.

Actually, it was found that the static electricity of the various voltages up to 250,000 volts could be easily obtained by this method on the rectified side of the condenser C_3 which is the upper terminal of the accelerating tube P_2 .

The special feature of the present device is to provide the condenser C_4 and the transformer T_4 , by means of the pushing action of which an electric circuit may be made through the positive ray tube P_1 in the direction $C_3-K_4-C_4-K_5-P_1-C_3$. Since the running electrical apparatus with moving parts such as a motor-generator or inductor was entirely dismissed from the high potential side, it was found not only easy to operate but also essentially convenient to minimise the amount of brush discharge and so to maintain a high voltage by a

All of the condensers used in the present experiment are of oil-filled (O. F.) type (of 0.016 μ . F. capacity and 200 K. V. test voltage) manufactured by SUMITOMO SEISAKUSHO.

low power equipment such as this.

Each of the condensers, even on the earth side, was independently insulated from the earth for the highest voltage obtainable in the experiment, the earth sides of the condensers C_3 and C_4 being then earthed by means of the wide tubes of water resistances R_1 and R_2 respectively. The undue direct discharge against the earth due to the sudden change of the potential of any one of the condensers induced by an abrupt discharge through P_2 , which may otherwise often take place and strongly affect the counting system with amplifier and recorder, was found to be perfectly reduced and the experiment could be then carried out without inconvenience.

Fig. 2. a.

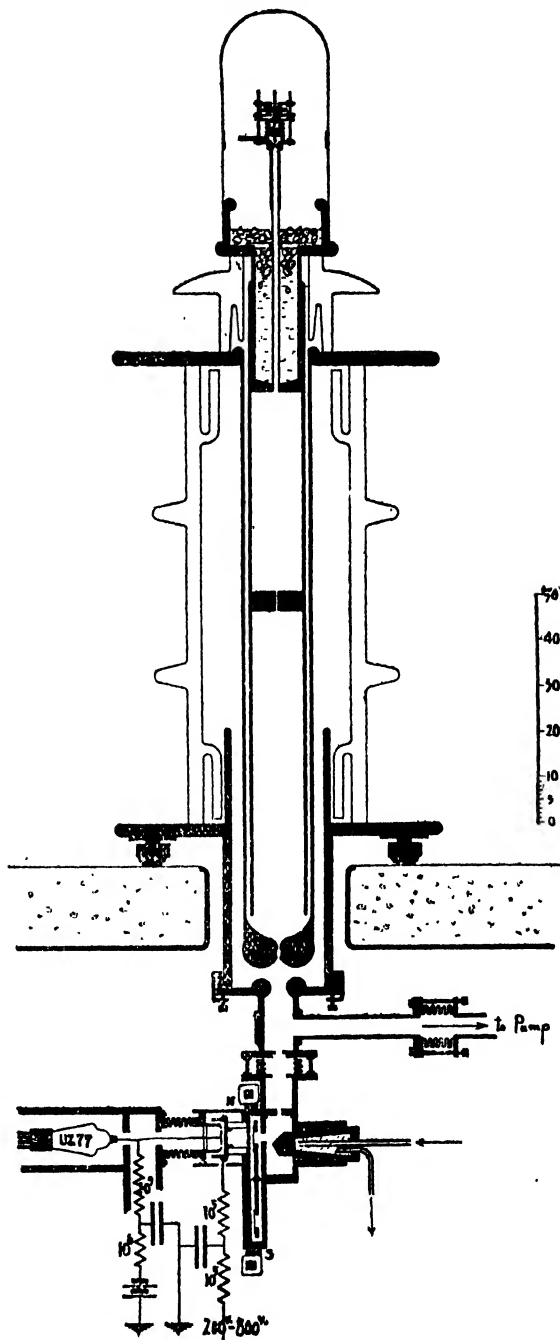


Fig. 2, b.

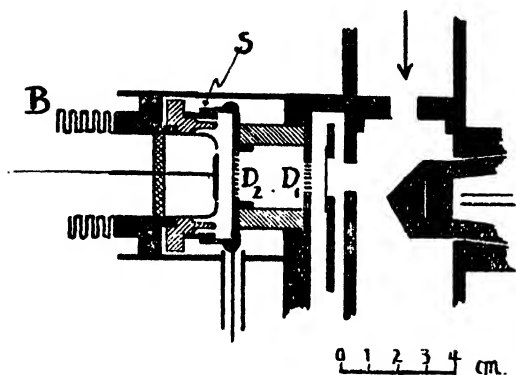
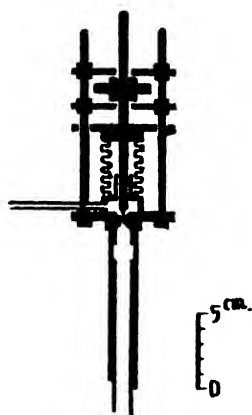


Fig. 2, c.



b) *The Positive Ray Tube.*

The positive ray tube used in this experiment is designed after OLIPHANT and RUTHERFORD⁶⁾ and is especially intended that heavy currents of accelerated ions may run as short a distance as possible and be easily focussed on the target. The dimensions and the setting conditions of the tube are as given in the annexed figure (Fig. 2). After the experimental conditions were well tested, the glass cylinder was replaced by a porcelain tube (one metre long and 37 cm across) specially designed as a protection against undue discharge, which otherwise frequently took place being caused by the bombardment of stray ions and electrons on the parts joined to the plates of electrodes.

In order to seal the joints the wax Apiezon Q was first used, but it was afterward found inconvenient for use in a tropical climate (34° C in summer) because the oil contained in the wax was slowly sucked out into the vacuum tube and it extended in a few weeks as a thin film over a considerable part of the electrodes and disturbed the favourable conditions of the tube by evolving a considerable quantity of carbon monoxide gas on discharge. Subsequently, therefore, each end of the porcelain tube P, (at least) was mechanically sealed to electrode plates by inserting a rubber ring. To maintain a good vacuum in the accelerating tube, a set of oil diffusion pump (P and Q in series) of the speed 20 liters per second was found con-

venient to use, it was also found, however, that a pump of larger capacity should be chosen to obtain stronger currents of ions at higher voltages than those here experienced. The outgassing process after mounting was found to be exclusively effective when the high tension, *alternating* current was directly applied to the discharge tube.

The efficiency of ion current production was found to be remarkably influenced by the discharging conditions of the tube P_1 , the diameter of the tube, the shape of the entrance to the canal and the vacuum conditions. By observing the intensity of the fluorescence of the Willemite screen or the deflection of the galvanometer connected to the Faraday box placed at the position of the target, it was found that, in the optimum condition, the pressure of the gas in the ionizing tube was relatively low, and the terminal voltage difference of this part was about 40,000 volts or more.

After the conditions had been well established, it was found that a current of 20 milliamperes or more could be conveniently allowed for producing ions in the ionizing tube P_1 and a current of ions of 10 microamperes was continually obtained in the accelerating tube.

It was arranged that, the accelerated ions should, in case of necessity, be analysed by an electromagnet which was capable of producing a field up to 20,000 gauss in a space of 1 cm distance between poles of an area of $3 \times 10 \text{ cm.}^2$ In most parts in the present experiment, however, the magnet was dismissed, since, in the case of low accelerating voltage like this, the effective parts of the acting ions in causing disintegrations were taken to be atom ions and the relative probabilities of disintegration to be compared were those separately due to the bombardment of ions of hydrogen and heavy hydrogen respectively.

c) *The Counting System.*

At the stage of preliminary experiments in which the chief object was to become familiar with the general aspects of the artificial disintegration of various light elements, the scintillation method of

counting was adopted, since this method, though primitive and laborious, was found very reliable for beginners.

After experiments were made to test the function of the whole apparatus and the disintegration phenomena, this counting system was replaced by an ionization chamber with a linear amplifier and recorder of the WYNNE-WILLIAMS⁷⁾ type to which some necessary improvements have been added. Though the detailed description of the apparatus will be given in another paper, the following short account may be of interest.

Now the first troublesome thing encountered in this counting system is that it is very liable to be disturbed by slight mechanical shocks as well as by sound waves. The second is that it is naturally so disturbed by impulsive electric discharges, which may often take place in this kind of experiments, that the counting system may cease to be reliable (in its function).

These troubles, however, were shown to completely eliminated by the following precautions.

- 1) Each of the amplifying systems was encased in a separate box made of stout iron plates, 1 cm thick, and the rooms for tubes, coupling systems and stabilizing condensers, etc. respectively were separately provided for. All the tubes were supported by rubber belts.

- 2) The pentode tube UZ-77 was used in the first detecting stage, the grid of which was directly connected with the collector of the ionization chamber (Fig. 2) and its sensitivity being controlled by varying the voltage of the screen-grid in a range from 12 to 30 volts. This procedure was found very effective for the purpose. No natural back-ground fluctuation was detected on the "Zero" line of the oscillogram even when the sensitivity of the instrument was so adjusted that the kicks due to α -particles were 2 cm, the linearity of the amplifying function being maintained.

- 3) The most important improvement was that a "leak" of 10^9 ohms was inserted so as to lead the collector to the earth. It was found that not only no remarkable change of sensitivity was detected

by this means, but also the temporary damage to the counting function, which otherwise often took place and lasted for some seconds after an intense spark discharge had occurred somewhere in the high tension system, was entirely eliminated. The kicks due to the ordinary small sparks could be so reduced by this careful shielding and earthing device that they were scarcely observed on the oscillogram, except that a few large kicks of essentially different nature from that of ionizing particle, were sometimes observed accompanying large sparks.

One could, by this means easily count and record the number of disintegrated particles and analyse their kind with great ease even amidst noises and mechanical as well as electrical disturbances.

d) The Target System.

The target, a magnetically controlled rotating disc of aluminium absorbers, and the entrance attachment of the ionization chamber were composed in a set as shown in Fig (2).

The disintegration particles from target were often observed simultaneously from two sides at right angles to each other, one for the absorption measurement and the other for standardizing purposes, so that the change of the intensity of disintegrations due to the varying condition of the discharge tube was checked during the measurement which sometimes had a duration of time of about half an hour or more.

To avoid the undue broadening of zero lines of the oscillogram due to the electrical disturbance of the target on discharge, a perforated diaphragm D_1 was inserted between the target and ionization chamber. It was found effective even when no aluminium absorber was placed there.

It was possible to adequately modify the depth of the ionization chamber by means of a screw device at S, the cap of the chamber properly taking its position by the elastic nature of the bellows tube B. Sometimes, D_1 was covered by a thin sheet of mica and the space between two diaphragms D_1 and D_2 , the wall of which was of ebonite,

was filled by air and the pressure of this part was made controllable. The equivalent ranges of the absorbers used were first calculated by weighing and then experimentally checked by using 8.5 cm α -particles from ${}^7_3\text{Li}$ bombarded by protons.*

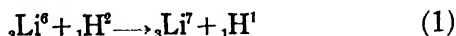
It was found that the counting system was well suited for counting α -particles when the depth of the ionization chamber was from 8 to 2 mm. the field of collecting ions being 100-150 volts per mm. For counting protons the depth should have been, at least, 5 mm to allow for a kick of about 6 mm at the end of its range on the oscillogram without losing the linearity of the amplification.

Throughout the experiment, thin targets of materials for disintegrations were used. For lithium, following the method first used by OLIPHANT and RUTHERFORD, the oxide was coated by exposing the target metal to the smoke of lithium burning in air. For boron, the thin film of borate was produced by strongly heating the target metal covered with a small quantity of borax.

IV. The Relative Probability of Different Types of Disintegration of ${}^6_3\text{Li}$ by Bombardment with Deuterium Ions.

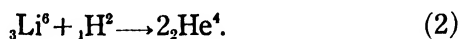
COCKCROFT and WALTON⁹⁾ reported that when a target of lithium hydroxyde was bombarded with a beam of deuterium ions accelerated by the potential of 500 K. V. the emission of a group of protons having a range of about 30 cm was observed. These particles were identified with the protons of a range up to 40 cm that had been previously observed by LAWRENCE, LEWIS and LIVINGSTON.⁹⁾

Being supported by the experiments of OLIPHANT, SHIRE and CROWTHER¹⁰⁾ on the disintegration of the separated isotopes of lithium, they suggested for the mechanism of the disintegration the reaction



* A polonium deposit, which was prepared by Mr. M. NAITO from Hokutolite an encrustation precipitated from the hot spring water of Hokuto in Taiwan, was subsequently used for the determination of the equivalent ranges.

By comparing the number of these protons with that of the well studied 13.2 cm α -particles¹¹⁾ emitted by the nuclear reaction



It was noticed that the relative probability of these different types of disintegration was not very different for deuterium ions having the energy of 500 K. E. V.

In the course of the experimental studies on the artificial disintegration of light elements by the bombardment of high speed ions, the present writers have carefully observed the variation in the relative number of these different groups of particles for a varying accelerating voltage of about 220 K. V.-100 K. V.

In the neighbourhood of this voltage the 30 cm particles were observed to be exceedingly reduced in number. At the voltage (120 K. V.) for which the 30 cm particles began to be measurably observed, the 13 cm particles were counted 20-30 times more numerous than the 30 cm particles and so the disintegrations of the type (2) were found to be 10-15 times more probable than those of the type (1).

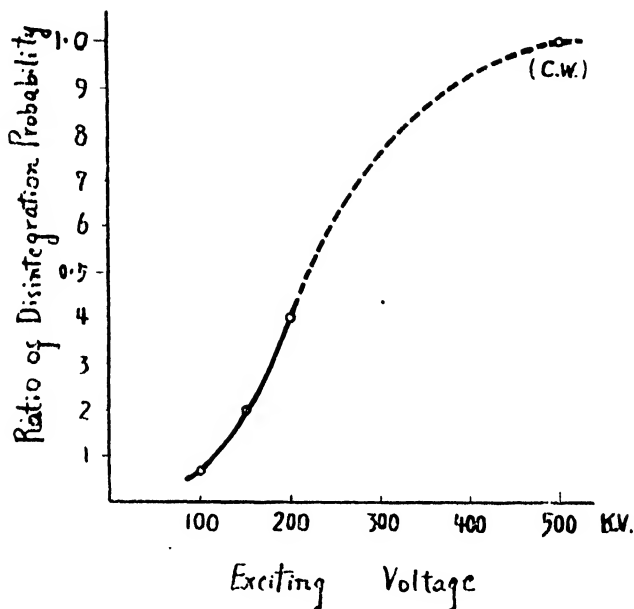
For increasing, accelerating voltages the ratio of the yields of particles was found gradually to decrease down to 5:1 at 200 K. V. (Table II).

Table II.

Exciting voltage (K. V.)	Number of 30 cm Protons Number of 13 cm α - particles	Ratio of the probability of disintegration
100	1:30	0.07
150	1:10	0.2
200	1:5	0.3
.....
500 (C. W.)	1:2 (C. W.)	1.

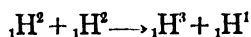
It seems, in this way, that the ratio may approach 1 at 500 K. V. as COCKCROFT and WALTON actually observed. Assuming this value, a curve showing the relation of the ratio of two disintegration probabili-

Fig. 3.

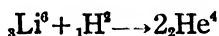


ties with the energies of the bombarding deuterons was presumptively traced as shown in Fig. (3).

On observation, special attention was paid to avoid miscounting the 14 cm particles^{12) a} due to the process



which sometimes copiously were emitted from the contaminated heavy hydrogen on the target exposed to ions for some duration of time, for the 13 cm particles due to the process



For this purpose, the disintegration phenomena of heavy hydrogen by the bombardment of ions of the same isotope was previously well studied,^{12) b} and the "kicks" on the oscillogram due to the protons were carefully observed for absorbers of various thickness.

The sensitivity of the counting system was then so adjusted that at about "9 cm" absorber the kicks of 14 cm protons due to ${}_1\text{H}^2 + {}_1\text{H}^2$ reaction could be scarcely observed on the oscillogram, while those of

the 13 cm α -particles due to ${}_3\text{Li}^6 + {}_1\text{H}^2$ were distinctly observed (about 5 mm long). The kicks due to protons ending in the ionization chamber (about 7 mm deep) were then found to be about 2.5 mm in length, and so both the 14 cm protons and 30 cm protons could be clearly observed respectively only in the neighbourhood of their end of range.

By this means we could easily and safely compare the number of 30 cm proton particles with that of the 13 cm α -particles due to ${}_3\text{Li}^6$.

We see in this way that, so long as the kinetic energies of the bombarding ions of heavy hydrogen are small, the ${}_3\text{Li}^6$ nucleus is much more liable, if it reacts with ${}_1\text{H}^2$, to disintegrate symmetrically into two α -particles than to emit a proton resulting in a heavier isotope ${}_3\text{Li}^7$.

This datum is in some respects of interest for finding out any law that may govern the probability of the occurrence of these two different types of disintegration processes.

If, both of the disintegrating processes occur after an excited ${}_4\text{Be}^8$ nucleus was once made up, the law controlling the disintegration process may be considered to be either the law of maximum liberation of energy resulting in the most possibly stable atoms, or the disposition of equipartition of relativistic mass and momentum to the disintegrating particles.

Difficulties are, however, met if we want to account for by these considerations the equal probability of these two types of disintegration for higher accelerating voltages.

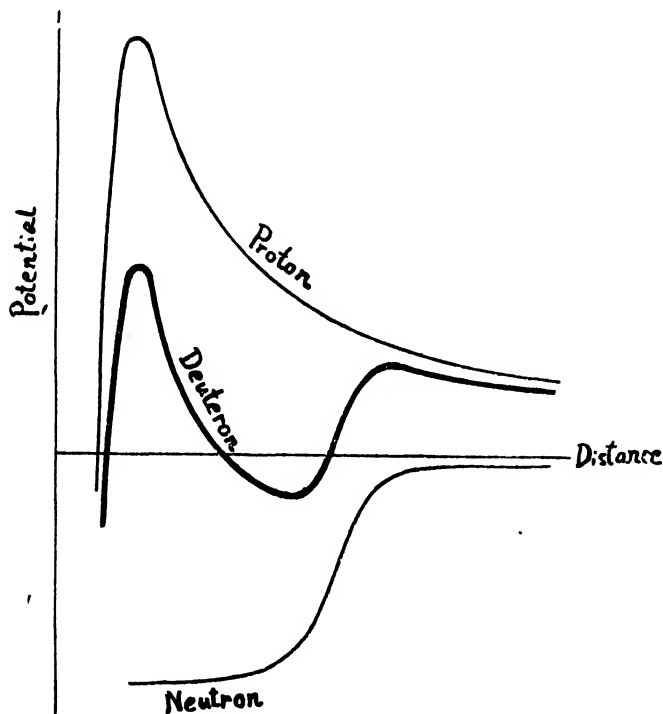
Another possible, controlling condition may be the angular momentum relation¹³⁾ in the collision process and the statistics obeyed by the disintegrating particles. It is possible, indeed, to put forward a hypothesis by presumably assigning an appropriate quantum number to the collision and disintegration process, but in the present state of knowledge, it is a thing to be reserved to the future.

Since the relative number of particles of these two different groups varies considerably with the accelerating voltages applied to bombarding ions, it may be considered that the two types of disintegration are already different in the capturing process. It seems then

that while the ${}_1\text{H}^2$ nucleus unites in the second case with ${}_3\text{Li}^6$ as a whole, once in ${}_4\text{Be}^8$, it is, in the first case, "polarised" in the nuclear field of Coulombian repulsion on the component proton and the strong attracting force on its neutron, and subsequently split up.

Indeed we know that slow neutrons are easily captured by ${}_3\text{Li}^6$ nuclei and that the cross section of a ${}_3\text{Li}^6$ nucleus for absorbing slow neutron is as large as the order of 10^{-22} — 10^{-23} cm^2 while¹⁴⁾ the radius of the potential hole for a proton is considered to be comparatively small (10^{-12} — 10^{-13} cm) and hence the proton is subject to strong repulsion up to this region.

Fig. 4.



If we show this relation in a presumptive diagram (Fig. 4) the potential curve for ${}_1\text{H}^2$ (as a whole) has a minimum in a region of relatively weak repulsion on protons and then rises once to its maximum and finally drops again into its hole.

For a relatively slow ${}_1\text{H}^2$ ion the attraction effect prevails over

the repulsion one and it unites if possible with ${}_3\text{Li}^4$ nucleus as a whole in a region in which the ${}_1\text{H}^2$ nucleus is scarcely polarised, so the probability of occurrence of the reaction in the type (1) is very small.

For particles of increasing kinetic energy the probability of being subject to "polarisation" becomes large and hence the probability that the neutron alone eventually will be captured into a stable state, liberating the excess of energy as the kinetic energy of the ejected proton.

For the particles of energies higher than the height of the potential barrier against ${}_1\text{H}^2$ the ratio of the probabilities of occurrences of the two types of disintegration should become stationary. It may be assumed, according to this argument, that the height of the potential barrier of ${}_3\text{Li}^6$ against deuteron is about 500 K. E. V.

It seems, in this way, that the last way of interpretation is among others the most plausible at present, it is however more desirable to study experimentally other various cases of alternative reactions of this kind than to indulge in further speculation.

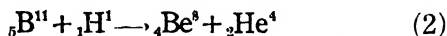
V. The Relative Probability of Different Types of Disintegration of ${}_6\text{B}^{11}$ Bombarded by Protons.

In a number of experiments made by COCKCROFT and WALTON,³⁾ OLIPHANT and RUTHERFORD⁸⁾ and also by KIRCHNER,¹⁵⁾ it was observed that a group of α -particles having a characteristically continuous distribution of energies between zero and 5.65 M. E. V. was copiously ejected from a boron target exposed to high speed protons. The reaction is believed to be expressed by



Together with these α -particles another homogeneous group of α -particles, having a range of about 4.5 cm (5.8 M. E. V. energy), was also observed in much smaller numbers (about $\frac{1}{200}$ of the total number of particles emitted from boron bombarded by protons).

It was explained by KIRCHNER that the latter group of α -particles was to be ascribed to the reaction



the mass of ${}_4\text{Be}^8$ having been then estimated to be 8.0074.

Now in the present experiment, which intends to observe the relative yield of the particles belonging to these two different groups, the number of α -particles was carefully counted for various thicknesses of absorbers by using an ionization chamber of 3 mm deep (and 0.75 cm² wide) with an improved linear amplifier and oscillograph system.

When the numbers were plotted against the thickness of the absorbers, curves of a character quite similar to that of OLIPHANT and RUTHERFORD were always obtained for various accelerating voltages.

The total number of α -particles (all of the kicks on the oscillogram were counted) counted with a 1 cm absorber was found to be about 150 times that of those with a 3.5 cm absorber. No remarkable variation in the relative yield was detected for voltages varying between 100 K. V. and 200 K. V. This fact suggests to us that these two different types of disintegration are probably due only to the mechanisms of the escape of the particles and not to the different ways of capturing.

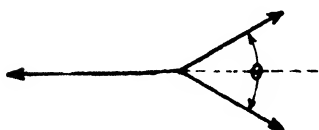
Since we could not selectively count the number of kicks superior to a certain definite amount, the distribution curve was not obtained. But the total number of particles observed at various thicknesses of absorbers could be distinctly counted and so the value of the relative yield obtained by this means are taken to be reliable.

Now, since the values of energy-liberation of these two types of disintegration are 0.0090 and 0.0091¹⁶⁾ in mass unit respectively, it seems in this case, that the liberation of energy (or the sum of the mass of resultant nuclei) is a matter of indifference for controlling the probability of disintegration. The law of equipartition of mass among the disintegrated particles seems to prevail in this case.

If we take, however, the disintegration of type (2) as a special case of the disintegration of type (1)—in which two α -particles commence to be emitted at a small angle in the opposite direction to the third one and then their relative velocities are so small that they can not escape from each other surmounting their mutual potential barrier

from the inner side of the nucleus and are obliged to remain united (probably temporally) into ${}_4\text{Be}^8$,—the probability of the occurrence of the type (2) may be interpreted as the integrated probability of the occurrence of type (1) in a region of limited angle for which the relation

$$M_\alpha V_\alpha^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq \text{Effective height of the mutual potential barrier of two } \alpha\text{-particles}$$

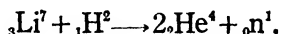


is satisfied.

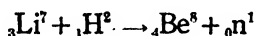
Assuming, as the experimental results of OLIPHANT and of KIRCHNER show, the maximum value of the angle $\theta/2$ to be roughly 45° ⁷⁾ and $\frac{1}{2} M_\alpha V_\alpha^2 = 5.5$ M. E. V., the height of the mutual potential barrier of the α -particles is to be estimated as about 5.5 M. E. V.

But since these hypotheses belong at present to no more than the field of speculation further argument is to be avoided.

It is, however, here to be noticed that investigations on the distribution of neutrons from a ${}_3\text{Li}^7 + {}_1\text{H}^2$ reaction¹⁸⁾ among various energies suggested that, besides the well-studied reaction



the reaction



took place with the relative probability of about 1%.

This fact seems closely related to the thing in the case under consideration.

In conclusion, we wish to express our acknowledgement to Nippon Gakujutu Shinkokai for the grants which have rendered this work possible.

References.

- 1) RUTHERFORD, Phil. Mag. 37, 581, (1919).
RUTHERFORD and CHADWICK, Phil. Mag. 42, 809, (1921).
44, 417, (1922).
- 2) GAMOW, Zeit. f. Physik, 51, 204, (1928).
52, 510, (1928).
- 3) COCKCROFT and WALTON, Proc. Roy. Soc. A, 136, 619, (1932).
137, 229, (1932).
- 4) DÖPEL, Zeit. f. Physik, 81, 821, (1933).
RAUSCH von TRAUBENBERG, ECKARDT and GEBAUER, Zeit.f. Physik. 80, 557, (1933).
LAWRENCE, LIVINGSTON and WHITE, Phys. Rev. 42, 150, (1933).
LAWRENCE and HENDERSON, Phys. Rev. 43, 98, (1933).
44, 781, 782, (1933).
- 5) COCKCROFT, Int. Conf. on Phys., London, October (1934).
- 6) OLIPHANT and RUTHERFORD, Proc. Roy. Soc. A, 141, 259, (1933).
- 7) WYNNE-WILLIAMS, Proc. Roy. Soc. A, 131, 391, (1931).
RUTHERFORD, WARD and WYNNE-WILLIAMS, Proc. Roy. Soc. A, 129, 211, (1930).
- 8) COCKCROFT and WALTON, Proc. Roy. Soc. A, 144, 704, (1934).
- 9) LAWRENCE, LEWIS and LIVINGSTON, Phys. Rev. 44, 55, (1933).
- 10) OLIPHANT, SHIRE and CROWTHER, Nature 133, 377, (1934).
Proc. Roy. Soc. A, 146, 922, (1934).
- 11) OLIPHANT, RUTHERFORD and KINSEY, Proc. Roy. Soc. A, 141, 722, (1933)
- 12)a OLIPHANT, HARTECK and RUTHERFORD, Proc. Roy. Soc. A, 144, 692, (1934).
DEE, Proc. Roy. Soc. A, 148, 632, (1935).
- 12)b ARAKATSU, KIMURA and UEMURA, Kagaku. 5, 144, (1935).
- 13) BECK, Handb. d. Radiologie 6, 390, (1933).
ARAKATSU, Mem of the Fac. of Sci. and Agr. Taihoku Imp. Univ. 10, 81, (1934).
GOLDHABER, Proc. Camb. Phil. Soc. 30, 561, (1934).
Inter. Conf. on Phys. Lond. (1934).
- 14) AMALDI, d'AGOSTINO, FERMI, PONTECARVO, RASETTI and SEGRÈ, Proc. Roy. Soc. A, 149, 522, (1935).
CHADWICK and GOLDHABER, Nature 135, 65, (1935).
DUNNING, PEGRAM, FINK and MITCHEL, Phys Rev. 47, 416, (1935), 48, 265, (1935).
- 15) KIRCHNER, Naturwiss. 21, 476, (1933).
KIRCHNER and NEUERT, Phys. Z, 34, 897, (1933).
35, 292, (1934).
- 16) OLIPHANT, KEMPTON and RUTHERFORD, Proc. Roy. Soc. A, 150, 241, (1935).
- 17) OLIPHANT, Inter. Conf. on Phys. Lond. (1934).
- 18) BONNER and BRUBAKER, Phys. Rev. 48, 734, (1935).

Description of the Plates.

Plate I.

- a: View of high tension equipment.
- b: Positive ray tube mounted on observation chamber. The inner surface of the chamber is completely lined with a lead plate of 1 cm thick.

Plate II.

- a: The oscillogram of the series of kicks of the disintegrated α -particles due to a ${}^6\text{Li} + {}^1\text{H}^2$ reaction for various thicknesses of absorbers, from 8.3 cm to 15 cm air equivalent. The depth of the ionization chamber is 3 mm.

As is clearly shown, the amount of the "kicks", being equal for a definite thickness of absorber, gradually increases with the path of the particles got through. (6 mm at 11.5 cm abs.)

At 13.0 cm absorber all of the kicks of the α -particles suddenly disappear, while the kicks due to protons of a ${}^1\text{H}^2 + {}^1\text{H}^2$ reaction begin to be observed on the oscillogram. (3 mm for a 13 cm abs.)

At a 15 cm absorber no kick is observed.

- b: The oscillogram of the kicks due to 14 cm protons for the increased sensitivity of the counting system.

Plate III.

The oscillogram of the kicks of the disintegrated α -particles due to ${}^9\text{B}^{11} + {}^1\text{H}^1$ reaction. The depth of the ionization chamber is 5 mm.

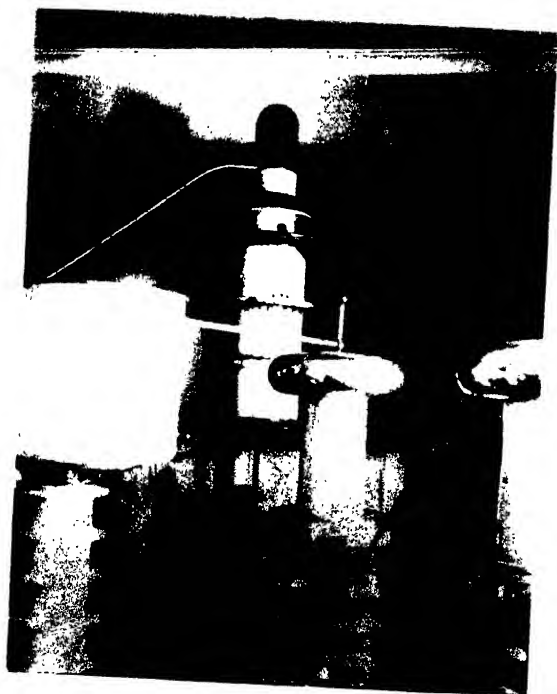
- a: The comparison of the series of kicks for a 2 cm absorber for two extremely different thicknesses of boron target.
- b. and c: Number of kicks at various thicknesses of absorbers, for the exciting voltage of 200 K.V. and 120 K.V. respectively.

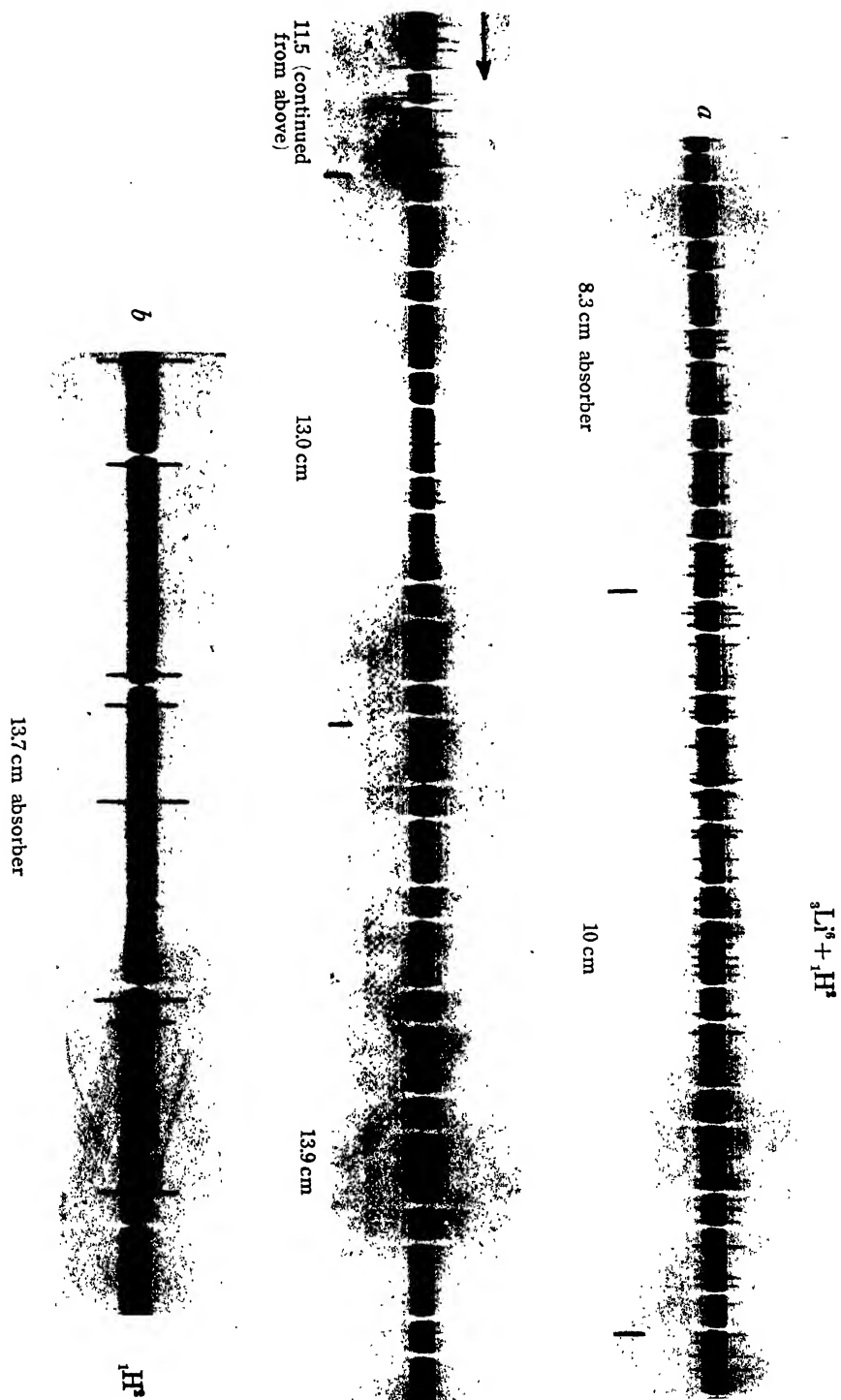
While the height of the kicks for a 2.5 cm absorber are clearly uneven (from 0-12 mm), all of the kicks for a 3.5 cm absorber are quite uniform (9 mm). This fact shows the existence of the perfectly homogeneous group of α -particles of the range between 3.5 cm and 4.5 cm., together with the continuous group of α -particles ending at about 3 cm.

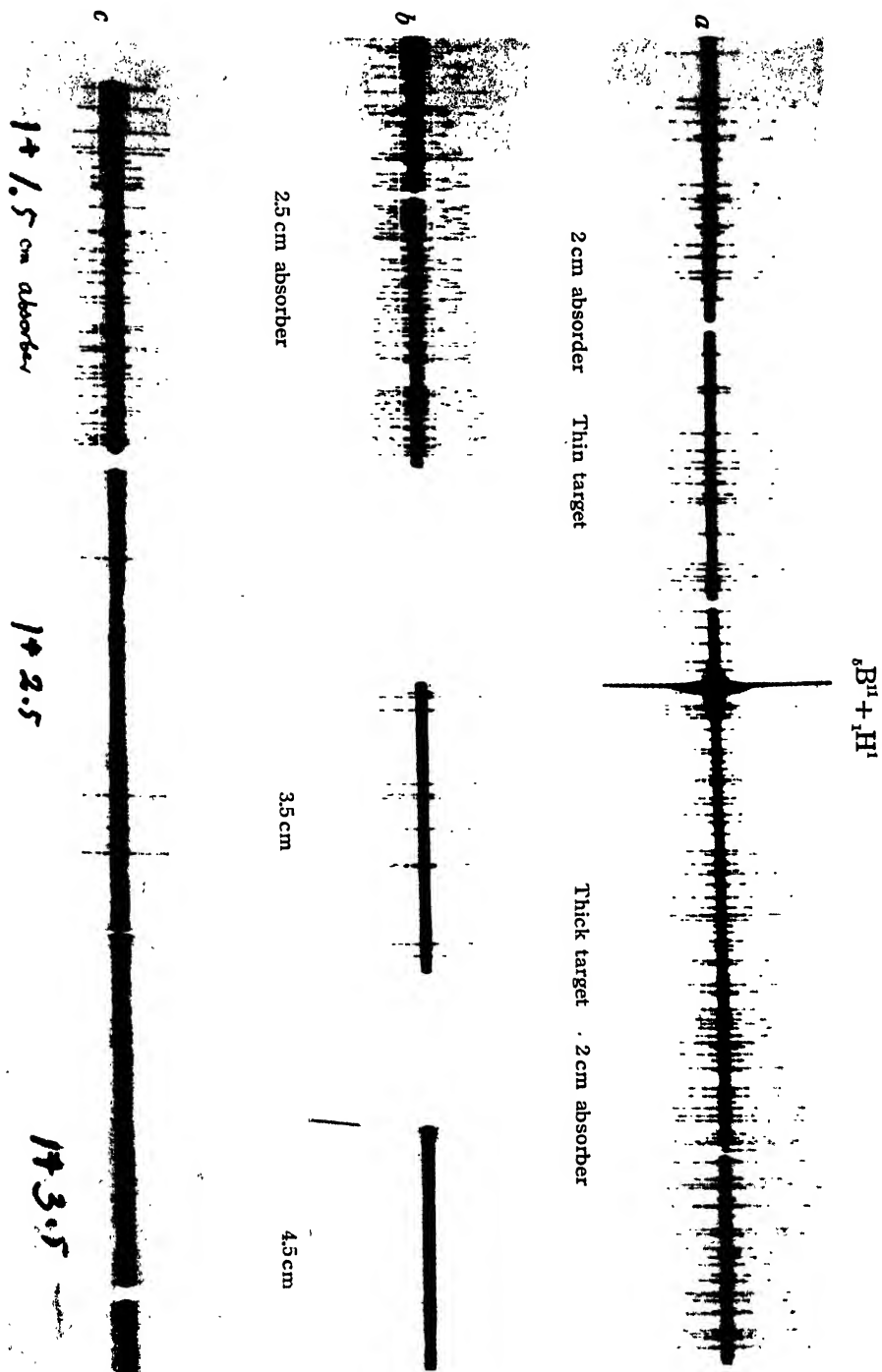
(a)



(b)







ON A PAIR OF SURFACES MUTUALLY RELATED, (V)

Sôzi MATUMURA

(Received for publication, June 9, 1936)

In this paper I will consider

$$(A) \quad \xi_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v = 0$$

again.⁽¹⁾

(1)

The ENNEPER-WEIERSTRASS equations of a real minimal surface are

$$\begin{cases} (1) & x = \frac{1}{2} \int (1-u^2) F(u) du + \frac{1}{2} \int (1-v^2) \phi(v) dv, \\ (2) & y = \frac{i}{2} \int (1+u^2) F(u) du - \frac{i}{2} \int (1+v^2) \phi(v) dv, \\ (3) & z = \int u F(u) du + \int v \phi(v) dv, \end{cases}$$

where u, v are conjugate variables, and $F(u), \phi(v)$ are conjugate analytic functions.

Minimal surfaces applicable to surfaces of revolution are given by

$$F(u) = C u^{m-2},$$

where m is real.

(1) NAKAZIMA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, I, Tohoku Math. Journ. 30 (1928), p. 142.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agr. Taihoku Imp. Univ., Formosa, Japan, Vol. XVIII, No. 4, September, 1936.]

Next, let us consider the case in which the cartesian coördinates in (1), (2), (3) satisfy (A).

If we put (1) in (A), then we have

$$(4) \quad \sigma = \frac{(v^2 - 1)\phi(v)}{(1 - u^2)F(u)}.$$

If we put (2) in (A), then we get

$$(5) \quad \sigma = \frac{(1 + v^2)\phi(v)}{(1 + u^2)F(u)}.$$

From (4), (5) we have

$$(6) \quad u^2 v^2 = 1.$$

If we put (3) in (A), then we get

$$(7) \quad \sigma = -\frac{v\phi(v)}{uF(u)}.$$

From (4) and (7), we have

$$(8) \quad uv = -1 \quad \text{or} \quad u = v.$$

From (5) and (7) we get

$$(9) \quad uv = -1 \quad \text{or} \quad u + v = 0.$$

From (6), (8), (9) we get

$$(10) \quad uv = -1.$$

From (10) we know that this is not impossible, because u, v are conjugate variables.

(2)

When \mathfrak{x} in (A) is a sphere and the parametric curves are orthogonal net, then

$$(1) \quad \mathfrak{x}_{uv} = a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v, \quad \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v = 0, \quad \mathfrak{x}^2 = 1, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_u = 0, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_v = 0,$$

where

$$(2) \quad -\frac{\sigma}{\lambda} = a, \quad -\frac{1}{\lambda} = b.$$

When η and ζ are spheres, which are orthogonal to ξ , then

$$(3) \quad \begin{cases} \eta\xi_u = 0, & \eta\xi_v = 0, & \zeta\xi_u = 0, & \zeta\xi_v = 0, \\ \eta^2 = 1, & \zeta^2 = 1, & \eta\zeta = 0, \end{cases}$$

where η and ζ are orthogonal to each other.

We see readily that the function ξ , η , ζ satisfy a system of differential equations of the form

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_{uu} = a\xi_u + \beta\xi_v + D_1\eta + D_2\zeta, \\ \xi_{uv} = a\xi_u + b\xi_v \\ \xi_{vv} = \gamma\xi_u + \delta\xi_v + D_1'\eta + D_2'\zeta, \end{cases}$$

wherein

$$(5) \quad \begin{cases} \eta_u = m_1\xi_u + A_1\zeta, & \zeta_u = m_2\xi_u + A_2\eta, \\ \eta_v = n_1\xi_u + B_1\zeta, & \zeta_v = n_2\xi_u + B_2\eta, \\ a = \frac{1}{2} E_u/E, & \beta = -\frac{1}{2} E_v/G, & D_1 = \eta\xi_{uu}, & D_2 = \zeta\xi_{uu}, \\ a = \frac{1}{2} E_v/E, & b = \frac{1}{2} G_u/G, & \gamma = -\frac{1}{2} G_u/E, & \delta = \frac{1}{2} G_v/G, \\ D_1' = \eta\xi_{vv}, & D_2' = \zeta\xi_{vv}, & m_1 = -D_1/E, & n_1 = -D_1'/G, \\ m_2 = -D_2/E, & n_2 = -D_2'/G, \end{cases}$$

and wherein

$$(6) \quad \begin{cases} E = \xi_u^2, & G = \xi_v^2, & \frac{1}{2} E_v \left(\frac{D_1}{E} + \frac{D_1'}{G} \right) = D_{1v} + B_2 D_2, \\ \frac{1}{2} E_v \left(\frac{D_2}{E} + \frac{D_2'}{G} \right) = D_{2v} + B_1 D_1, \\ \frac{1}{2} G_u \left(\frac{D_1}{E} + \frac{D_1'}{G} \right) = D_{1u}' + A_2 D_2', \\ \frac{1}{2} G_u \left(\frac{D_2}{E} + \frac{D_2'}{G} \right) = D_{2u}' + A_1 D_1', \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_u (E_u/E + G_u/G) + E_v (E_v/E + G_v/G) = 2 (E_{uv} + G_{uv}) \\ \quad \quad \quad + 4 (D_1 D_1'' + D_2 D_2''), \\ A_{1v} = B_{1u}, \quad A_1 + A_2 = 0, \quad B_1 + B_2 = 0. \end{array} \right.$$

From (1) and (4) we get

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \xi_{uu} = D_1 \eta \xi + D_2 \zeta \xi, \quad \xi \xi_{uv} = 0, \\ \xi \xi_{vv} = D_1'' \eta \xi + D_2'' \zeta \xi, \quad \eta \xi = A_1 \zeta, \\ \delta_u \xi = A_2 \eta \xi, \quad \eta \xi = B_1 \zeta, \quad \zeta \xi = B_2 \eta \xi. \end{array} \right.$$

From (7) we have

$$(8) \quad \frac{\eta''}{A_1} = \frac{\eta''}{B_1}, \quad \frac{\zeta''}{A_2} = \frac{\zeta''}{B_2}.$$

From (8) we know that

$$(9) \quad \frac{E(\eta)}{A_1^2} = \frac{G(\eta)}{B_1^2}, \quad F(\eta) = 0.$$

where $E(\eta)$, $F(\eta)$, $G(\eta)$ are the first fundamental coefficients of η .

For the surface ζ we get

$$(10) \quad \frac{E(\zeta)}{A_2^2} = \frac{G(\zeta)}{B_2^2}, \quad F(\zeta) = 0.$$

As has been proved in one of my former papers,⁽¹⁾ we get the

Theorem : *When the normals to η and ζ in the points, which have the same values of u , v are parallel and both η and ζ are convex surfaces and*

$$A_1^2 : B_1^2 = A_2^2 : B_2^2$$

exist, then η , ζ are determined uniquely except in translation.

(3)

Consider two surfaces ξ and $\bar{\xi}$, which satisfy the differential equations

(1) NAKAZIMA, S.: Über die ersten Fundamentalgrößen bei Eiflächen, Japanese Journ. of Math. 4 (1927), p. 101.

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{x}_{uv} + a\bar{x}_u + b\bar{x}_v = 0, \\ \bar{x}_{uv} + \bar{a}\bar{x}_u + \bar{b}\bar{x}_v = 0 \end{cases}$$

respectively, where

$$(2) \quad \begin{cases} a = -\frac{\sigma}{\lambda}, \quad b = -\frac{1}{\lambda}, \quad \bar{a} = \frac{\sigma}{\lambda}, \quad \bar{b} = \frac{1}{\lambda}, \\ \sigma = \frac{GE_u - FG_u}{EG_u - FE_u}, \quad \frac{1}{2}\lambda = -\frac{EG - F^2}{E_u F - G_u E}, \\ \bar{\sigma} = -\frac{GE_u - FG_u}{EG_u - FE_u}, \quad \frac{1}{2}\lambda = -\frac{E\bar{G} - \bar{F}^2}{E_u \bar{F} - G_u \bar{E}}. \end{cases}$$

Consider the surface \bar{x} , which satisfy

$$(3) \quad \bar{x} = c\bar{x} + (1-c)\bar{x},$$

where c is a constant.

From (3) we have

$$(4) \quad \begin{cases} \bar{x}_u = c\bar{x}_u + (1-c)\bar{x}_u, \\ \bar{x}_v = c\bar{x}_v + (1-c)\bar{x}_v, \\ \bar{x}_{uv} = c\bar{x}_{uv} + (1-c)\bar{x}_{uv}, \end{cases}$$

so it follows

$$(5) \quad \bar{x}_{uv} + \bar{a}\bar{x}_u + \bar{b}\bar{x}_v = 0,$$

where

$$(6) \quad \begin{cases} \bar{a} = ca + (1-c)\bar{a}, \\ \bar{b} = cb + (1-c)\bar{b}. \end{cases}$$

If \bar{x} is the first focal sheet of a congruence, the second sheet \bar{x}_1 is given by

$$(7) \quad \bar{x}_1 = \bar{x} + \frac{1}{2b}\bar{x}_u.$$

From (7) we have

$$(8) \quad \bar{x}_1^2 = \bar{x}^2 - \frac{1}{4b} \bar{x}^2 + \frac{1}{b} \bar{x} \bar{x}_u.$$

When $\bar{x}^2 = 1$,

$$(9) \quad \bar{x}_1^2 = 1 + \frac{1}{4b^2} \bar{E}.$$

When $\bar{x}_1^2 = \text{const.}$,

$$(10) \quad 1 + \frac{1}{4b^2} \bar{E} = \text{const.}$$

From (10) it follows ;

Theorem : *When \bar{x} is a sphere and the locus of the mean points of \bar{x} is also a sphere, then (10) follows.*

The necessary and sufficient condition that the tangents to the curves $v = \text{const.}$ on \bar{x} form a congruence of RIBAUOUR is that the function \bar{a} and \bar{b} satisfy the condition

$$(11) \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial u} - \frac{\partial \bar{b}}{\partial v} + \frac{\partial^2 \log(\bar{b})}{\partial u \partial v} = 0.$$

For the tangents to the curves $u = \text{const.}$ to form a congruence of this kind, it is necessary and sufficient that

$$(12) \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial u} - \frac{\partial \bar{b}}{\partial v} - \frac{\partial^2 \log(\bar{a})}{\partial u \partial v} = 0.$$

For the tangents to the curves of both families to be congruence of RIBAUOUR, it is necessary that

$$(13) \quad \bar{a}\bar{b} = UV,$$

where U is a function of u alone and V of v alone.

The condition that the point equation of \bar{x} may have equal invariants is

$$(14) \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{b}}{\partial v}.$$

To study the equation (5) means the generalization of STETSON's paper.⁽¹⁾ When $c=1$, this becomes STETSON's case.

(4)

We consider a suite of Laplace

$$(1) \quad \cdots x_{-m}, \cdots x_{-2}, x_{-1}, x, x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots$$

from x in (A), where

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = x - \frac{1}{a} x', & x_{-1} = x - \frac{1}{b} x'', \\ a = -\frac{\sigma}{\lambda}, & b = -\frac{1}{\lambda}, \end{cases}$$

so we have

$$\begin{aligned} (3) \quad x_0 &= (x_{-1}) - \frac{1}{a} (x_{-1})', \\ &= \left(x - \frac{1}{b} x'' \right) - \frac{1}{a} \left(x - \frac{1}{b} x'' \right)', \\ &= x - \frac{1}{a} x' - \left(\frac{b'}{b^2 a} + \frac{1}{b} \right) x'' + \frac{1}{ab} x''', \end{aligned}$$

then it follows

$$(4) \quad x x_0 = x x - \frac{1}{a} x x' - \left(\frac{b'}{b^2 a} + \frac{1}{b} \right) x x'' + \frac{1}{ab} x x'''.$$

When x is a sphere, then

$$(5) \quad x x = 1.$$

When parametric curves on x are orthogonal then from (4), (5) we get

$$(6) \quad x x_0 = 1,$$

so we have the

(1) STETSON, T. M.: Conjugate system of curves on a surface both of whose Laplace transforms are lines of curvature. Ann. of Math. 19. p. 103.

Theorem : *When \mathfrak{x} is a sphere, then \mathfrak{x} and \mathfrak{x}_0 touch each other.*

Put

$$(7) \quad \bar{\mathfrak{x}}_0 = (\mathfrak{x}_1) - \frac{1}{b} (\mathfrak{x}_1)_u,$$

then

$$(8) \quad \bar{\mathfrak{x}}_0 = \mathfrak{x} - \left(\frac{1}{a} + \frac{a_u}{a^2 b} \right) \mathfrak{x}_v - \frac{1}{b} \mathfrak{x}_u + \frac{1}{ab} \mathfrak{x}_{uv}$$

For $\bar{\mathfrak{x}}_0$ also above theorem exists.

From (3), (8) we get

$$(9) \quad \mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}_0 = \frac{a_u}{a^2 b} \mathfrak{x}_v - \frac{b_v}{b^2 a} \mathfrak{x}_u.$$

When \mathfrak{x} is a sphere, we have

$$(10) \quad \mathfrak{x} (\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}_0) = 0.$$

Theorem : *When \mathfrak{x} is a sphere then \mathfrak{x} and $\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}_0$ are perpendicular to each other.*

With the same reasoning we get

$$(11) \quad \mathfrak{x} (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_{-1}) = 0,$$

so the above theorem exists.

If we take

$$(12) \quad \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_v - \frac{1}{a} \mathfrak{x},$$

$$(13) \quad \mathfrak{x}_{-1} = \mathfrak{x}_u - \frac{1}{b} \mathfrak{x}$$

instead of (2) then (3) becomes

$$\begin{aligned} (14) \quad \mathfrak{x}_0 &= (\mathfrak{x}_{-1})_v - \frac{1}{a} (\mathfrak{x}_{-1}) \\ &= \left(\mathfrak{x}_u - \frac{1}{b} \mathfrak{x} \right)_v - \frac{1}{a} \left(\mathfrak{x}_u - \frac{1}{b} \mathfrak{x} \right) \end{aligned}$$

$$=x_{uv}-\frac{1}{b}x_v-\frac{1}{a}x_u+\left(\frac{1}{ab}+\frac{b_v}{b^2}\right)x$$

and (4) becomes

$$(15) \quad xx_0 = \frac{1}{ab} + \frac{b_v}{b^2},$$

when x is a sphere, so we have the

Theorem :

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{ab} + \frac{b_v}{b^2},$$

where φ is the angle between x and x_0 .

We consider

$$(16) \quad x_{uv} = ax_u + bx_v$$

and

$$(17) \quad x' = \frac{x}{\lambda},$$

then

$$(18) \quad x'_{uv} = \{a - (\log \lambda)_v\} x'_u + \{b - (\log \lambda)_u\} x'_v,$$

where

$$(19) \quad \lambda_{uv} = a\lambda_u + b\lambda_v.$$

From (12) we get

$$\begin{aligned} (20) \quad x'_1 &= x'_v - \frac{1}{a - (\log \lambda)_v} x' \\ &= \left(\frac{x}{\lambda}\right)_v - \frac{1}{a - (\log \lambda)_v} \cdot \frac{x}{\lambda} \\ &= \frac{x_v \lambda - \lambda_v x}{\lambda^2} - \frac{1}{a - (\log \lambda)_v} \cdot \frac{x}{\lambda}, \end{aligned}$$

so it follows

$$(21) \quad xx'_1 = -\frac{\lambda_v}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda \{a - (\log \lambda)_v\}},$$

when \mathfrak{x} is a sphere.

Theorem :

$$\cos^2 \phi = -\frac{\lambda_r}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda \{a - (\log \lambda)_c\}},$$

where ϕ is the angle between \mathfrak{x} and \mathfrak{x}' .

(5)

We consider

$$(1) \quad \mathfrak{x}_{rr} - a\mathfrak{x}_r - b\mathfrak{x}_c + c\mathfrak{x} = 0$$

If \mathfrak{x} is a sphere, then

$$(2) \quad \mathfrak{x}^2 = 1,$$

so we have

$$(3) \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_{rr} = 0, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_r = 0.$$

When the parametric curves are orthogonal, then

$$(4) \quad \mathfrak{x}_r\mathfrak{x}_c = 0.$$

From (1) we get

$$(5) \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_{rr} - a\mathfrak{x}\mathfrak{x}_r - b\mathfrak{x}\mathfrak{x}_c + c = 0.$$

From (3) we have

$$(6) \quad \mathfrak{x}_r\mathfrak{x}_{rr} + \mathfrak{x}_c\mathfrak{x}_{rr} = 0.$$

From (4) and (5) we get

$$(7) \quad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_{rr} = 0.$$

From (3), (5) and (7) we get

$$c = 0$$

so we have the

Theorem : When \mathfrak{x} in (1) is a sphere and the parametric curves are orthogonal, then c in (1) must be zero.

(6)

We consider⁽¹⁾

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial v} = 0.$$

If

$$(2) \quad \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} = 0;$$

or

$$\omega = \text{const.},$$

then

$$(3) \quad r = \frac{U_0 + V_0}{U_1 + V_1},$$

where the U_s are functions of u alone and V_s of v alone; r is the relative distance of A-surface with respect to the another A-surface.

For r -sphere

$$(4) \quad (U_0 + V_0) + \text{const.} (U_1 + V_1) = 0.$$

When in (1)

$$(5) \quad \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} = 0, \quad \text{i. e.} \quad \omega = \sin^{-1}(e^v),$$

or

$$(6) \quad \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} = 0, \quad \text{i. e.} \quad \omega = \cos^{-1}(e^u),$$

then we can find the relative distance by quadratures.

When (1) can be reduced to

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = -\frac{\phi}{(1+uv)^2},$$

then, from (7), we get

(1) EISENHART, L. P.: Surfaces with the same spherical representation of their lines of curvature as pseudospherical surfaces, American Journ. of Math. Vol. XXVII (1905), p. 113.

$$(8) \quad r = \frac{2[u\phi_0(v) - v f_0(u)](1+uv)^{-1} + f'_0 - \phi'_0}{2[u\phi_1(v) - v f_1(u)](1+uv)^{-1} + f'_1 - \phi'_1}$$

When (1) can be reduced to

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial u},$$

then we get

$$(10) \quad r = \frac{vU_0 + V_0}{vU_1 + V_1}.$$

When

$$(11) \quad \begin{cases} -\frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} = \frac{2V'}{U+V}, \\ -\frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} = \frac{2U'}{U+V}, \end{cases}$$

then

$$(12) \quad r = \frac{(U_0 + V_0)(U_1 + V_1)}{(U_0 + V_0)(U_1 + V_1)}.$$

(7)

The equation

$$(1) \quad \hat{\xi} = \xi + \mu \xi_u$$

defines the coördinates of a point $\hat{\xi}$ on the tangent to the curve $v = \text{const.}$ at the point ξ .

If $\hat{\xi}$ be allowed to move along a curve $u = \text{const.}$ at ξ , the corresponding lines (1) generate a ruled surface $R^{(u)}$, and the point $\hat{\xi}$ traces a curve on this ruled surfaces.

The tangent at any point of the curve traced by $\hat{\xi}$ has its direction cosines proportional to $\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial v}$, where, for instance,

$$(2) \quad \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial u} + \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v}.$$

Using the equation (A), we obtain

$$(3) \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial v} - \mu \frac{\sigma}{\lambda} \right) \frac{\partial \xi}{\partial u} + \left(1 - \mu \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

The tangent to the curve traced by the point ξ as v alone varies, lying in the plane determined by the lines (1) and the normal to the ξ if, and only if,

$$(4) \quad \mu = \lambda$$

We have thus determined geometrically a unique point ξ on each line (1), which we call the minus first transform of the point ξ , and which is defined by the equations represented by

$$(5) \quad \xi = \xi - \lambda \xi''.$$

In the same way, we may determine the first transform of the point ξ' lying on the tangent to the curve $u = \text{const.}$ at ξ , and defined by the equations with the form of

$$(6) \quad \xi' = \xi - \frac{\lambda}{\sigma} \xi''.$$

Our designation of the points ξ and ξ' as the minus first and first transforms of the point ξ indicates the analogy of the LAPLACE transforms of a conjugate net.

$$(8)$$

When the surface ξ is referred to its lines of curvature, a necessary and sufficient condition that the tangents to the curve $v = \text{const.}$ shall form a congruence of GUICHARD is

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) = 0.$$

When for $u = \text{const.}$ the same condition is satisfied, then

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) = 0.$$

From (A), (1) and (2) we get

$$(3) \quad \xi_{uv} - \frac{U\sqrt{G}}{\sqrt{E}} \xi_u - \frac{V\sqrt{E}}{\sqrt{G}} \xi_v = 0,$$

where $F=0$.

When the tangents to each system of parametric curves on \mathfrak{x} form congruence of RIBAUCOUR, then the point equation is

$$(4) \quad \xi_{uv} + UV'_1 \xi_u + U'_1 V_1 \xi_v = 0.$$

From (3) and (4) we get

$$(5) \quad \begin{cases} -\frac{U\sqrt{G}}{\sqrt{E}} = U_1 V'_1, \\ -\frac{V\sqrt{E}}{\sqrt{G}} = U'_1 V_1. \end{cases}$$

From (5) we know that

$$\sqrt{\frac{G}{E}} = U_1 V'_1,$$

$$\sqrt{\frac{E}{G}} = U'_1 V_1,$$

where

$$1 = U_1 U'_1 V_1 V'_1.$$

(9)

When $F=0$ in (A), then

$$(1) \quad \xi_{uv} - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \xi_u - \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \xi_v = 0.$$

From (1) we know that invariants H , K are

$$(2) \quad \begin{cases} H = -\frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}, \\ K = -\frac{\partial^2 \log \sqrt{G}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}. \end{cases}$$

If $K=0$, the integral of (1) can be given the form

$$(3) \quad x = \sqrt{G} \left(V + \int \frac{U \sqrt{E}}{\sqrt{G}} du \right).$$

If $H=0$, the integral of (1) can be given the form

$$(4) \quad x = \sqrt{E} \left(U + \int \frac{V \sqrt{G}}{\sqrt{E}} dv \right).$$

(3) and (4) are equations of our surfaces.

N. B. If we put ε instead of k in my paper⁽¹⁾ of 1630, then we get similar theorems, where⁽²⁾ $\varepsilon^2=0$.

(10)

Let us consider on a paper of EISENHART.⁽³⁾

When the surface μ is a sphere and the parametric curves on μ are orthogonal, then

$$(1) \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0, \quad \mu^2 = 1,$$

so we have

$$\mu^2 ab = \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial v} - a\mu \frac{\partial \mu}{\partial u} - b\mu \frac{\partial \mu}{\partial v} + ab \mu^2,$$

$$\text{i. e.,} \quad \frac{\mu b}{\partial \mu / \partial u - b\mu} = \frac{\partial \mu / \partial v - a\mu}{\mu a},$$

$$\text{i. e.,} \quad \begin{cases} 0 = \mu b du + \left(\frac{\partial \mu}{\partial v} - a\mu \right) dv, \\ 0 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial u} - b\mu \right) du + \mu a dv. \end{cases}$$

$$(2)$$

When the surface x is a sphere, then, from (2) we have

-
- (1) NAKAZIMA, S.: Über zwei Flächen, die eine Beziehung haben, (II), Tohoku Math. Journ. 33, p. 153.
 (2) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeo. I (1930), S. 261.
 (3) EISENHART, L. P.: Conjugate systems with equal point invariants, Ann. of Math. Vol. 18 (1916-17), p. 7.

$$(3) \quad \begin{cases} x dX_1=0, \\ x dX_2=0. \end{cases}$$

From (3) we know that the surface F_1 and F_2 are both perpendicular to the sphere x .

(11)

We consider the transformation

$$(1) \quad \bar{x}_u = \bar{x}_v, \quad \bar{x}_v = \bar{x}_u,$$

then (A) becomes

$$(2) \quad \bar{x}_{uv} + \frac{\bar{\sigma}}{\lambda} \bar{x}_v + \frac{1}{\lambda} \bar{x}_u = 0,$$

where

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{\sigma} = \frac{\bar{E}\bar{G}_v - \bar{F}\bar{E}_v}{\bar{G}\bar{E}_u - \bar{F}\bar{G}_v}, \\ \frac{1}{2}\bar{\lambda} = \frac{\bar{G}\bar{E} - \bar{F}^2}{\bar{G}_v\bar{F} - \bar{E}_v\bar{G}}. \end{cases}$$

When \bar{x} is a sphere, then

$$(4) \quad \bar{x}^2 = 1.$$

From (4) we get

$$(5) \quad \bar{x} \bar{x}_u = 0, \quad \bar{x} \bar{x}_v = 0.$$

From (2) and (5) we get

$$(6) \quad \bar{x} \bar{x}_{vv} = 0.$$

From (5) we know

$$(7) \quad \bar{x}_v \bar{x}_v + \bar{x} \bar{x}_{vv} = 0.$$

From (6) and (7) we get

$$\bar{x}_v \bar{x}_v = 0,$$

i. e.,

$$(8) \quad \bar{G}=0,$$

so we have the

Theorem : *When (A) is transformed by (1) into (2) and \bar{x} is a sphere, then (8) follows.*

$$(12)$$

Take

$$(1') \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial z}{\partial u} + b \frac{\partial z}{\partial v} + cx = 0,$$

$$(2') \quad A \sum x^l + B \sum y^m + C \sum z^n + \dots = 0$$

instead of (1) and (2) respectively in one of my former paper,⁽¹⁾ then it follows

$$(3) \quad Al \sum x^{l-1} x_{uv} + Bm \sum y^{m-1} y_{uv} + \dots = 0,$$

where x, y, z, \dots are solutions of (1'), where

$$Al \sum x^l + Bm \sum y^m + \dots = 0.$$

Next, take

$$(1') \quad z_{uv} + az_u + bz_v + cz = 1,$$

$$(2') \quad A \sum x^l + B \sum y^m + c \sum z^n + \dots = 1$$

instead of (1) and (2) respectively, so it follows

$$(3) \quad Al \sum x^{l-1} x_{uv} + Bm \sum y^{m-1} y_{uv} + \dots = 0,$$

where x, y, z, \dots are solutions of (1), where

$$Al \sum x^l + Bm \sum y^m + \dots = 0.$$

From (2') we get

$$(4) \quad Al(l-1)x^{l-2}x_{uv} + Alx^{l-1}x_{uv} + Bm(m-1)y^{m-2}y_{uv} + Bmy^{m-1}y_{uv} + \dots = 0.$$

(1) MATUMURA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, (V) Tôhoku Math. Journ. Vol. 36, p. 125.

From (3), in both cases, we know that

$$(5) \quad Al(l-1)x^{l-2}x_u x_v + Bm(m-1)y^{m-2}y_u y_v + \dots = 0.$$

This is one case of the generalization of my paper⁽¹⁾ quoted here.

$$(13)$$

When between \bar{x} , \bar{g} exist

$$(1) \quad \bar{x}_u = \bar{\lambda} \bar{g}_u, \quad \bar{x}_v = \bar{\mu} \bar{g}_v,$$

then, from (A) we have

$$(2) \quad \bar{\lambda} \bar{g}_{uv} + \left(\bar{\lambda}_v + \frac{\sigma}{\bar{\lambda}} \bar{\lambda} \right) \bar{g}_u + \frac{1}{\bar{\lambda}} \bar{\mu} \bar{g}_v = 0,$$

where

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma = \frac{GE_v - FG_u}{EG_u - FE_v}, & \lambda = \frac{2(EG - F^2)}{E_v F - G_u E} \\ E = \lambda^2 \bar{E}, & F = \bar{\lambda} \bar{\mu} \bar{F}, \quad G = \bar{\mu} \bar{G}. \end{cases}$$

When

$$(4) \quad \bar{\lambda} + \frac{\sigma}{\bar{\lambda}} \bar{\lambda} = 0,$$

or

$$(5) \quad \bar{\mu} = 0,$$

then the coördinates of the surface \bar{g} can be found by quadratures.

The tangents to each system of parametric curves on \bar{g} form congruences of RIBAUCOUR, when

$$(6) \quad \begin{cases} U_1 V'_1 = -\frac{\bar{\lambda}_v + \frac{\sigma}{\bar{\lambda}} \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}, \\ U'_1 V_1 = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda} \bar{\lambda}}. \end{cases}$$

(14)

We consider

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0,$$

then

$$(2) \quad \begin{cases} \psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \psi, \\ \psi_{-1} = \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \psi, \\ H = -\frac{\partial^2 \log \sin \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u}, \\ K = -\frac{\partial^2 \log \cos \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u}. \end{cases}$$

Put

$$(3) \quad \psi = \lambda \psi',$$

then⁽¹⁾ ψ' are solutions of

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = & \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sin \omega}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\cos \omega}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial v} \\ & + \left(-\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \lambda - \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sin \omega}{\lambda} \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\cos \omega}{\lambda} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \right) \theta. \end{aligned}$$

Thus, it is clear that when we find the solutions of (4), then we can find r -distance in consequence.

(15)

We consider two transformations

$$(1) \quad \xi_1 = \xi + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_v, \quad \eta = \xi - \frac{\lambda}{\sigma} \xi_v,$$

(1) HAMMOND, E. S.: Periodic conjugate nets, Ann. of Math. 23. p. 240.

then, from (1) follows

$$(2) \quad \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y} = \mathfrak{x}^2 - \frac{\lambda^2}{\sigma^2} \mathfrak{x}_v^2.$$

When \mathfrak{x} is a sphere, then from (2) we get

$$(3) \quad \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y} = 0,$$

i. e., and $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}$ are perpendicular to each other.

From

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_{-1} = \mathfrak{x} + \lambda \mathfrak{x}_u, \\ \mathfrak{z} = \mathfrak{x} - \lambda \mathfrak{x}_u \end{cases}$$

also we get the same result.

Next we consider

$$(5) \quad \begin{cases} \mathfrak{y} = \mathfrak{x} - \frac{\lambda}{\sigma} \mathfrak{x}_v, \\ \mathfrak{z} = \mathfrak{x} - \lambda \mathfrak{x}_u, \\ \mathfrak{x}' = \mathfrak{x} / \bar{\lambda}, \end{cases}$$

then \mathfrak{x}' will satisfy the equation

$$(6) \quad -\frac{\partial^2 \mathfrak{x}'}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda \right) \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial u} + \left(\lambda + \frac{\partial}{\partial u} \log \bar{\lambda} \right) \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial v} = 0.$$

We consider two transformations

$$(7) \quad \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + \frac{\lambda}{\sigma} \mathfrak{x}_v,$$

$$(8) \quad \mathfrak{x}' = \mathfrak{x} / \bar{\lambda},$$

then the coördinates \mathfrak{x}'_1 are given by equations of the form

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \xi'_1 &= \xi' + \frac{1}{\frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda} - \xi'_v \\
 &= \frac{\xi}{\lambda} + \frac{\lambda \xi_r - \xi \bar{\lambda}_r}{\frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda} = \frac{\xi_1}{\lambda_1},
 \end{aligned}$$

where

$$(10) \quad \bar{\lambda}_1 = \lambda + \frac{\lambda}{\sigma} \bar{\lambda}_r.$$

Observe that λ_1 is the transform (7) of $\bar{\lambda}$, as ξ_1 is of ξ . We therefore have

$$(11) \quad \xi'_1 = -\frac{\xi_{-1}}{\lambda_{-1}}.$$

Similarly

$$(12) \quad \xi'_{-1} = -\frac{\xi_{-1}}{\lambda_{-1}}.$$

(16)

In order that we can generalize A-surface,⁽¹⁾ we consider

$$(1) \quad F(u) \equiv \sum_{i,k=1}^n A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0,$$

then according to HADAMARD⁽²⁾ we can find two solutions u_1, u_2 of (1), then

$$r = u_1/u_2$$

is the r -distance in r -geometry.

(17)

We consider the transformation in (A)

-
- (1) EISENHART, L. P.: Surfaces with the same spherical representation of their Lines of Curvature as Pseudospherical Surfaces, American Journ. of Math. Vol. XXVII, p. 118.
 (2) Lectures on CAUCHY's Problem in Linear Partial Differential Equations (Yale, 1923), p. 70, et seq.

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{x}_r = x - \frac{1}{a} x_r, \\ \bar{x}_s = x - \frac{1}{b} x_s, \end{cases}$$

where

$$(2) \quad \begin{cases} a = -\frac{\sigma}{\lambda}, \\ b = -\frac{1}{\lambda}. \end{cases}$$

From (1) we get

$$(3) \quad \begin{cases} E = (xx) + \frac{1}{a^2} G - \frac{2}{a} (xx_r), \\ \bar{F} = (xx) - \frac{1}{a} (xx_r) - \frac{1}{b} (xx_s) + \frac{1}{ab} F, \\ \bar{G} = (xx) - \frac{1}{b^2} E - \frac{2}{b} (xx_s), \end{cases}$$

where E, F, G ; $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ are first fundamental coefficients of x and \bar{x} respectively.

When x is a sphere, then from (3) we get

$$(4) \quad \begin{cases} \bar{E} = 1 + \frac{G}{a^2}, \\ \bar{F} = 1 + \frac{F}{ab}, \\ \bar{G} = 1 + \frac{E}{b^2}. \end{cases}$$

(4) is the relation between E, F, G and $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$.

Next we consider the radial transformation

$$(5) \quad x' = \frac{x}{\lambda},$$

then, from (1), (5) we know that

$$(6) \quad \bar{x}'x'' = \frac{1}{\lambda} \left[(xx') - \frac{1}{a} (xx'') \right].$$

When x a sphere, then from (6) we get

$$(7) \quad \bar{x}'x'' = -\frac{1}{\lambda^2}.$$

so follows

$$(8) \quad \cos^2 \varphi = -\frac{1}{\lambda^2},$$

where φ is the angle between x' and the tangents to the curves $v = \text{const.}$

By the same reasoning we know that

$$(9) \quad \cos^2 \phi = -\frac{1}{\lambda^2},$$

where ϕ is the angle between x' and the tangents to the curves $u = \text{const.}$

From (4) we know that the minimal lines on the \bar{x} are

$$(10) \quad \left(1 + \frac{G}{a^2}\right) du^2 + 2\left(1 + \frac{F}{ab}\right) dudv + \left(1 + \frac{E}{b^2}\right) dv^2 = 0,$$

$$\text{i. e.} \quad \left(du + dv \right)^2 + \left[G \left(\frac{du}{a} \right)^2 + 2F \left(\frac{du}{a} \right) \left(\frac{dv}{b} \right) + E \left(\frac{dv}{b} \right)^2 \right] = 0.$$

(18)

We consider

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{x} = x + \alpha x_u + \beta x_v, \\ x_1 = x - \frac{1}{a} x_u, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_{-1} = \bar{x} - \frac{1}{b} \bar{x}_u, \\ \bar{x}' = \frac{\bar{x}}{\lambda}, \end{cases}$$

where

$$(2) \quad a = -\frac{\sigma}{\lambda}, \quad b = -\frac{1}{\lambda}.$$

When

$$(3) \quad (\bar{x}\bar{x}) = 1,$$

then

$$(4) \quad \begin{cases} (\bar{x}_1 \bar{x}) = 1 - \frac{a}{a} F(\bar{x}) - \frac{\beta}{a} G(\bar{x}), \\ (\bar{x}_{-1} \bar{x}) = 1 - \frac{a}{b} F(\bar{x}) - \frac{\beta}{b} F(\bar{x}), \\ (\bar{x} \bar{x}') = \frac{1}{\lambda}, \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \cos \phi_1 = 1 - \frac{a}{a} F - \frac{\beta}{d} G, & \cos \phi_2 = 1 - \frac{a}{b} E - \frac{\beta}{b} F, \\ \cos \phi_3 = 1/\lambda, \end{cases}$$

where ϕ_1 is the angle between \bar{x}_1 and \bar{x} ; ϕ_2 is the angle between \bar{x}_{-1} and \bar{x} ; ϕ_3 is the angle between \bar{x} and \bar{x}' .

(19)

From (3) and (6) in STETSON's paper⁽¹⁾ we get

$$(1) \quad x_{-1} = x - \frac{1}{b} x_u, \quad \dots\dots,$$

$$(2) \quad = \bar{x} - \frac{\mu}{\partial \mu / \partial v} x_v, \quad \dots\dots.$$

(1) STETSON, J. M.: Conjugate System of Curves, Annals of Math., 19, p. 105.

From (1) and (2) we know that

$$(3) \quad \bar{x}x_{-1} = xx - \frac{1}{b} \cdot xx_u - \frac{\mu}{\partial\mu/\partial v} xx_v + \frac{1}{b} \cdot \frac{\mu}{\partial\mu/\partial v} x_u x_v, \\ \dots\dots\dots$$

when the surfaces S is a sphere; the u -curves and the v -curves are orthogonal then from (3) we have

$$\bar{x}x_{-1} = 1, \quad \dots\dots, \quad \dots\dots.$$

i. e., the surface \bar{S} and S_{-1} touch each other.

With the same reasoning we know that, when S is a sphere then S_{-1} , S_1 touch each other.

(20)

If we find two solutions of

$$(1) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

we can find r -distance of A -surface with respect to the other A -surface.

Now we consider the case

$$(2) \quad \sin 2\omega = U + V,$$

and put

$$(3) \quad \frac{\partial x'}{\partial u} = h \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x'}{\partial v} = -h \frac{\partial x}{\partial v},$$

then

$$(4) \quad \frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial x'}{\partial v} = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0,$$

$$(2h = \varphi),$$

where U and V respectively are functions of u and v only.⁽¹⁾

From this fact we know that if we can find two solutions of (4), then from (3) we can find r -distance of A -surface with respect to the another A -surface.

$$\cdot \quad (21)$$

We consider

$$(1) \quad x_{uv} = \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} x_u + \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} x_v.$$

If $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$ are lines of curvature, then⁽²⁾

$$(2) \quad \begin{cases} (\log \sin \omega)_v = \frac{E_v}{2E} = (\log \sqrt{E})_v, \\ (\log \cos \omega)_u = \frac{G_u}{2G} = (\log \sqrt{G})_u, \end{cases}$$

so we get .

$$(3) \quad \sin \omega = \sqrt{E} U, \quad \cos \omega = \sqrt{G} V.$$

From (3) we have

$$(4) \quad 1 = EU^2 + GV^2.$$

When $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$ are not lines of curvature, then

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial (\log \sin \omega)}{\partial v} = \frac{GE_v - FG_u}{2H^2}, \\ \frac{\partial (\log \cos \omega)}{\partial u} = \frac{EG_u - FE_v}{2H^2}, \end{cases}$$

where $H^2 = EG - F^2$; E, F, G are first fundamental quantities of the surface \mathfrak{z} .

A net $N(x)$, whose cartesian coördinates x satisfy an equation (1) is called an orthogonal net, or, for the sake of brevity, an O net, if

(1) EISENHART, L. P.: Transformations of Surfaces, (1923), p. 8.

(2) EILENHART, L. P.: Transformations of Surfaces, p. 3.

$$(6) \quad \begin{cases} E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \neq 0, \\ F = \sum \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \\ G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \neq 0. \end{cases}$$

The second of these condition is equivalent to the requirement that W , defined by

$$(7) \quad 2W = \sum x^2$$

is a solution of (1). In this case we get

$$(8) \quad r = \frac{2W}{\omega_1},$$

where r is the r -distance of A-surface with respect to the another A-surface and ω_1 is another solution of (1).

We say that a net N is p . 0. if its point equation (1) admits $p-1$ solutions, y_1, y_2, \dots, y_{p-1} linearly independent of the x 's, such as

$$(9) \quad \begin{cases} \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 - \sum \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \neq 0, \\ \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 - \sum \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \neq 0, \\ \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right) - \sum \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right) = 0. \end{cases}$$

We call the y 's the complementary functions.

This means that

$$(10) \quad \sum x^2 - \sum y^2$$

is a solution of (1).

In this case we get

$$(11) \quad r = \frac{\sum x^2 - \sum y^2}{\omega_1}.$$

(22)

We consider⁽¹⁾

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0.$$

Put

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\psi_u}{\log \sin \omega}, & \eta = \frac{\psi_v}{\log \cos \omega}, \\ \xi_v = \frac{(\log \cos \omega)_u}{\log \sin \omega} \eta, & \eta_u = \frac{(\log \sin \omega)_v}{\log \cos \omega} \xi, \end{cases}$$

then it follows⁽²⁾ that

$$(3) \quad r = \frac{\int \xi \log \sin \omega du + \eta \log \cos \omega dv + C_1}{\int \xi \log \sin \omega du + \eta \log \cos \omega dv + C_2},$$

where r is the r -distance of one of the A-surfaces with respect to the other A-surface.

(23)

Now, let us consider

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial \sigma}{\partial u} + b \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0.$$

If we put

$$(2) \quad \begin{cases} M = a + \frac{1}{\sigma} \cdot \sigma_r, & N = b + \frac{1}{\sigma} \cdot \sigma_u, \\ h = a_u + ab, & k = b_v + ab, \end{cases}$$

then we get

$$(3) \quad M_u = h - MN, \quad N_v = k - MN,$$

- (1) EISENHART, L. P.: Surfaces with the same spherical Representation of their Lines of curvature as Pseudospherical Surfaces, American Journ. of Math. XXVII p. 113.
 (2) HAMBURGER, H.: Sphärische Abbildung im Gröszen, Math. Zeit. 31, S. 642.

so it follows that

$$(4) \quad \begin{cases} M_u - N_v = h - k, \\ M_u + N_v = h + k - 2MN. \end{cases}$$

From (4) we know that when $M_u - N_v$ and $M_u + N_v$ are orthogonal, then

$$(h - k)(h + k - 2MN) = 0.$$

$$(24)$$

If a net $N'(x')$ has equal point invariants, that is $b' = a'$, the equations

$$(1) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{a'^2} \frac{\partial x'}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{a'^2} \frac{\partial x'}{\partial v}$$

are consistent, and the x 's are coördinates⁽¹⁾ of a net N .

From (1) we get

$$(2) \quad \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{a'^4} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x'}{\partial v},$$

so we know that *when N' are orthogonal then N also must be orthogonal.*

$$(25)$$

From (A) we get

$$(1) \quad |\xi_{uv}, \xi_u, \xi_v| = 0.$$

On the other hand, if we consider the surface

$$\xi = \xi(u, v)$$

the equations of the tangents to the parametric curves are

$$(2) \quad \frac{X - x}{\partial x / \partial u} = \frac{Y - y}{\partial y / \partial u} = \frac{Z - z}{\partial z / \partial u},$$

(1) EISENHART, L. P.: Transformations of Surfaces, p. 32.

$$(3) \quad \frac{X-x}{\partial x / \partial v} = \frac{Y-y}{\partial y / \partial v} = \frac{Z-z}{\partial z / \partial v},$$

with X, Y, Z as running coördinates. These are the equations of two one-parameter families of ruled surfaces. The condition that these ruled surfaces be developable is (1), so we get the

Theorem : *In our case the ruled surfaces, which are formed by (2), (3) are developable. When in (2)*

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = f(u, v) \cdot V_1, \\ \frac{\partial y}{\partial u} = f(u, v) \cdot V_2, \\ \frac{\partial z}{\partial u} = f(u, v) \cdot V_3, \end{cases}$$

i. e., the developable (1) is cylinder then from (4) we get

$$(5) \quad \begin{cases} x = V_1 \int f(u, v) du + \bar{V}_1, \\ y = V_2 \int f(u, v) du + \bar{V}_2, \\ z = V_3 \int f(u, v) du + \bar{V}_3. \end{cases}$$

In this case (5) is the equation of our surface.

(26)

Let C and C^* be two curves, whose corresponding points are O and O^* respectively. Let P and P^* be points on C and C^* respectively so that $OP = O^*P^* = s$ (say).

Let $PP^* = \sigma$, then the relative curvature of C and C^* is defined to be⁽¹⁾

$$(1) \quad k(C, C^*) = \lim_{s \rightarrow 0} 2\sigma / s^2.$$

Then (1) can be put in the form⁽²⁾

$$[k(C, C^*)]^2 = g_{mn} (k^n - k^{*n}) (k^n - k^{*n}).$$

(1) Bull. Amer. Math. Soc., 29 (1923), p. 345.

(2) SYNGE, J. L.: On the Geo. of Dynamics, Philosophical transactions of the Royal Society of London, Vol. 226, p. 39.

(27)

If x, y are solutions of (A) and

$$(1) \quad k_1 x^2 - k_2 y^2 = 0,$$

where k_i are constants, then from (1) we get

$$(2) \quad \begin{cases} k_1 x x_{uv} - k_2 y y_{uv} = 0, \\ k_1 x x_{vv} - k_2 y y_{vv} = 0. \end{cases}$$

On the other hand, from (A) we get

$$(3) \quad \begin{cases} k_1 x_{uv} x + a k_1 x_{vv} x + b k_1 x_{vv} x = 0, \\ k_2 y_{uv} y + a k_2 y_{vv} y + b k_2 y_{vv} y = 0. \end{cases}$$

From (2) and (3) we know that

$$(4) \quad k_1 x x_{vv} - k_2 y y_{vv} = 0.$$

From (2) we get

$$(5) \quad k_1 x x_{vv} + k_1 x_{vv} x - k_2 y y_{vv} - k_2 y_{vv} y = 0.$$

Also from (4) and (5) we get

$$(6) \quad k_2 y_{vv} y = k_1 x_{vv} x,$$

so we get the

Theorem : *When (1) exist, then we can find curve systems on each of the two surfaces (x) and (y), so that they make two angles with constant ratios.*

This is one case of the generalization of my theorem of 1932.⁽¹⁾

(28)

If we consider

$$(1) \quad x_{uv} = a x_u + b x_v,$$

(1) NAKAZIMA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, IV, Tôhoku Math. Journ. 35 (1932), p. 339.

then we get

$$(2) \quad \begin{cases} \xi_{uu}^2 = a^2 \xi_u^2 + 2ab \xi_u \xi_v + b^2 \xi_v^2, \\ \xi_u \xi_{uu} = a \xi_u^2 + b \xi_u \xi_v, \\ \xi_v \xi_{uu} = a \xi_u \xi_v + b \xi_v^2. \end{cases}$$

From (2) we know

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} E_u = aE + bF, \\ F_u - \frac{1}{2} E_v = aF + bG, \\ L^2 + \frac{1}{4D^2} (E_u^2 G + 2E_u E_v F + E_v^2 E - 4E_u F_u F - 4E_v F_u E \\ + 4F_u^2 E) = aE + bF, \end{cases}$$

where $E, F, G; L, M, N$ are first and second fundamental quantities respectively. In our case (3) exists.

When $a=0$ in (1), then

$$\begin{aligned} \xi_{uv} &= b \xi_v, \\ \text{i. e.,} \quad \xi &= \eta(u) + \zeta(u) \int e^{\int \eta v} dv, \\ \text{i. e.,} \quad (4) \quad \xi &= \eta(u) + A(u, v) \cdot \zeta(u). \end{aligned}$$

From (3) we know that in our case the relation

$$(5) \quad L^2 + \frac{1}{4D^2} (E_u^2 G + 2E_u E_v F + E_v^2 E - 4E_u F_u F - 4E_v F_u E + 4F_u^2 E) = \frac{1}{2} E_u$$

exists.

(29)

Here we consider the circle-surfaces,⁽¹⁾ which has a close relation with ordinary surfaces.

Let the curves of a TCHEBYCHEF system on a circle-surface be

(1) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of Faculty of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, p. 36.

taken as parametric curves $t=\text{const.}$, $\tau=\text{const.}$, then we get⁽¹⁾

$$(1) \quad (\theta, \theta_t)=1, \quad (\theta, \theta_\tau)=\cos \omega, \quad (\theta_\tau \theta_\tau)=1.$$

The second curvature K of the circle-surface is

$$(2) \quad K = -\frac{1}{\sqrt{1-(\theta, \theta_t)^2}} \frac{\partial^2 \{\cos^{-1}(\theta, \theta_\tau)\}}{\partial t \partial \tau}.$$

If t and τ are the tangents to the parametric curves $\tau=\text{const.}$ and $t=\text{const.}$ respectively,

$$(3) \quad \begin{aligned} \text{div } t &= \frac{1}{\sqrt{1-(\theta, \theta_\tau)^2}} \frac{\partial \sqrt{1-(\theta, \theta_\tau)^2}}{\partial t} \\ &= \frac{(\theta, \theta_\tau)}{\sqrt{1-(\theta, \theta_\tau)^2}} \frac{\partial \{\cos^{-1}(\theta, \theta_\tau)\}}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$(4) \quad \text{div } \tau = \frac{(\theta, \theta_\tau)}{\sqrt{1-(\theta, \theta_\tau)^2}} \frac{\partial \{\cos^{-1}(\theta, \theta_\tau)\}}{\partial \tau}.$$

Let γ and γ' be the geodesic curvatures of the curves $\tau=\text{const.}$ and $t=\text{const.}$ respectively. Then

$$(5) \quad \frac{\partial \{\cos^{-1}(\theta, \theta_\tau)\}}{\partial t} = -\gamma,$$

$$(6) \quad \frac{\partial \{\cos^{-1}(\theta, \theta_\tau)\}}{\partial \tau} = \gamma',$$

$$(7) \quad \text{div } t = -\gamma \cot \{\cos^{-1}(\theta, \theta_\tau)\},$$

$$(8) \quad \text{div } \tau = \gamma' \cot \{\cos^{-1}(\theta, \theta_\tau)\}.$$

The unit vector in the direction of the bisector of the angle between the curves of a TCHEBYCHEF net is

$$(9) \quad \frac{1}{2}(t + \tau) \sec \frac{1}{2} \{\cos^{-1}(\theta, \theta_\tau)\},$$

and hence the ratio of increase of ω in this direction is

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \cos^{-1}(\theta, \theta_\tau)}{\partial t} + \frac{\partial \cos^{-1}(\theta, \theta_\tau)}{\partial \tau} \right\} \sec \left\{ \frac{1}{2} \cos^{-1}(\theta, \theta_\tau) \right\} \\ = \frac{1}{2} (\gamma' - \gamma) \sec \left\{ \frac{1}{2} \cos^{-1}(\theta, \theta_\tau) \right\}. \end{aligned}$$

(1) WEATHERBURN, C. E.: Differential Geo. of Three Dimensions, Cambridge, 1927, p. 152.

When

$$(11) \quad (\theta_t, \theta_t) = \cot^2 \alpha, \quad (\theta_t, \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1,$$

then t and τ are solutions of the equation

$$(12) \quad \Delta_1(\theta, \Delta_1\theta) = 2\Delta_2\theta(\Delta_1\theta - 1)$$

where⁽¹⁾ α is a function of t and τ .

Let us consider the circle-surface, taking $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ as parameter curves in DINI's surface,⁽²⁾ then

$$(\theta_t, \theta_t) = 1, \quad (\theta_t, \theta_\tau) = \cos \omega, \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1$$

so it follows that

$$\frac{\partial^2 \{\cos^{-1}(\theta_t, \theta_\tau)\}}{\partial t \partial \tau} = \sqrt{1 - (\theta_t, \theta_\tau)^2}.$$

(30)

When a spherical circle-surface Σ of total curvature $+1$ is referred to its lines of curvature, the parameters (t, τ) can be so chosen that the linear elements of the surface and its spherical representation $\bar{\Sigma}$ can be given the respective forms⁽³⁾

$$(1) \quad \begin{cases} ds^2 = \lambda [\sinh^2 \omega dt^2 + \cosh^2 \omega d\tau^2], \\ d\bar{s}^2 = \lambda [\cosh^2 \omega dt^2 + \sinh^2 \omega d\tau^2], \end{cases}$$

where ω is a solution of

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} = -\sinh \omega \cosh \omega.$$

From (1) we know that⁽²⁾

$$(3) \quad \begin{cases} (\theta_t, \theta_t) = \tanh^2 \omega, \quad (\theta_t, \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1, \\ (\bar{\theta}_t, \bar{\theta}_t) = \coth^2 \omega, \quad (\bar{\theta}_t, \bar{\theta}_\tau) = 0, \quad (\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau) = 1, \end{cases}$$

(1) EISENHART, P. L.: Differentialgeo. p. 90.

(2) Ann. di. mat. (2) 4 (1870-71), p. 184.

(3) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. II, p. 36.

i. e.,

$$(4) \quad (\theta_t, \theta_\tau) = (\theta_t, \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_t, \theta_t)(\theta_t, \theta_t) = 1, \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1.$$

Denote by $\bar{\Sigma}$ any surface with its lines of curvature represented upon the sphere by the same lines as Σ , and write its linear element thus⁽¹⁾

$$(5) \quad d\bar{s}^2 = \bar{\lambda} [(\bar{\theta}_t, \bar{\theta}_t) dt^2 + (\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau) d\tau^2].$$

The second fundamental quantities have the form

$$(6) \quad \frac{D}{D''} = \frac{\sqrt{(\theta_t, \theta_t)}}{\sqrt{(\theta_\tau, \theta_\tau)}} \coth \omega, \quad D = 0,$$

so we can get the minimal lines, the asymptotic lines, the lines of curvatures, and the characteristic lines on $\bar{\Sigma}$, as follows⁽²⁾

$$(7) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad J(f_1, f_2) = 0, \quad J[f_1, J(f_1, f_2)] = 0, \\ J[f_2, J(f_1, f_2)] = 0$$

where

$$(8) \quad \begin{cases} f_1 = (\bar{\theta}_t, \bar{\theta}_t) dt^2 + (\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau) d\tau^2, \\ f_2 = \sqrt{(\bar{\theta}_t, \bar{\theta}_t)} \cosh \omega dt^2 + \sqrt{(\bar{\theta}_\tau, \bar{\theta}_\tau)} \sinh \omega d\tau^2. \end{cases}$$

The equations of the normal curvature $\frac{1}{R}$ on $\bar{\Sigma}$ is

$$(9) \quad \frac{1}{R} = \frac{f_2}{f_1}.$$

When, upon a circle-surface of revolution, $\tau = \text{const.}$ are the meridians and $t = \text{const.}$ the parallels, the linear element is reducible to the form

$$(10) \quad ds^2 = dt^2 + \frac{1}{(\theta_t, \theta_t)} d\tau^2,$$

1) EISENHART, L, P.: Surface with the same spherical representation of their Lines of curvature as spherical Surface, American Journ. of Math. XXX, p. 21.

(2) OGURA, K.: On the theory of representation of Surfaces, Tôhoku Math. Journ. 12, p. 237.

where (θ, θ_t) is a function of t alone. In this case the expression for the total curvature is

$$(11) \quad K = -\sqrt{(\theta, \theta_t)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\sqrt{(\theta, \theta_t)}} \right).$$

For a spherical circle-surface we have $k = \frac{1}{a^2}$, where a is a real constant.

Substituting this value in equation (11) and integrating, we have

$$(12) \quad \frac{1}{\sqrt{(\theta, \theta_t)}} = c \cos \left(\frac{t}{a} + b \right),$$

where b and c are constants of integration.

If we take $b=0$, the linear element is

$$(13) \quad ds^2 = dt^2 + c^2 \cos^2 \frac{t}{a} \cdot d\tau^2.$$

When $b = -\frac{\pi}{2}$ and $-\frac{\pi}{4}$ in (12), then

$$(14) \quad ds^2 = dt^2 + c^2 \sin^2 \frac{t}{a} \cdot d\tau^2,$$

$$(15) \quad ds^2 = dt^2 + c^2 \cos^2 \left(\frac{t}{a} - \frac{\pi}{4} \right) d\tau^2.$$

When $K = -\frac{1}{a^2}$ in (11), then

$$(16) \quad \frac{1}{\sqrt{(\theta, \theta_t)}} = c_1 \cosh \frac{t}{a} + c_2 \sinh \frac{t}{a},$$

where c_i are constants of integration. We consider first the particular forms of the linear element arising when either of these constants is zero, or both are equal. They may be written

$$(17) \quad ds^2 = dt^2 + c^2 \cosh^2 \frac{t}{a} \cdot d\tau^2,$$

$$(18) \quad ds^2 = dt^2 + c^2 \sinh^2 \frac{t}{a} \cdot d\tau^2,$$

$$(19) \quad dz^2 = dt^2 + c^2 \exp. \left(\frac{2t}{a} \right) \cdot d\tau^2.$$

For a spherical circle-surface, the general form of $\frac{1}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)}}$ is

$$(20) \quad \frac{1}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)}} = \phi(\tau) \cos \frac{t}{a} + \psi(\tau) \sin \frac{t}{a},$$

and for pseudo-spherical circle-surfaces

$$(21) \quad \frac{1}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)}} = \phi(\tau) \cosh \frac{t}{a} + \psi(\tau) \sinh \frac{t}{a},$$

where ϕ and ψ are functions of τ . Next we consider a ruled W-circle-surface. The linear element of a ruled circle-surface is

$$(22) \quad ds^2 = dt^2 + (\theta_i \theta_i)^{-1} d\tau^2,$$

and the expressions for the total and mean curvatures are

$$(23) \quad K = -\frac{g^2 - (t - \alpha)^2}{(\theta_i \theta_i)^2}, \quad K_m = -\frac{r(\theta_i \theta_i) + \beta'(t - \alpha) + \beta \alpha'}{(\theta_i \theta_i)^2},$$

where r is a function of τ and α, β are, in EISENHARTS treatise,⁽¹⁾

$$g^2 = (t - \alpha)^2 + \beta^2.$$

In order that a relation exist between the principal radii it is necessary and sufficient that⁽¹⁾

$$\begin{aligned} & \frac{2(t - \alpha)}{\beta} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{r g^2 + \beta'(t - \alpha) + \beta \alpha'}{g^3} \right] \\ & - \left\{ \frac{\beta^2 \beta' - (t - \alpha)[r g^2 + 2\beta'(t - \alpha) + 3\beta \alpha']}{g^5} \right\} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{g^2}{\beta} = 0. \end{aligned}$$

(1) EISENHART, L. P.: A treatise on differential geo. of curves and surfaces, p. 299.

ÜBER FLÄCHEN UND KURVEN (XVII) :

Einige Bemerkungen über Kurven und Flächen

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, Sept. 29, 1936.)

Im folgenden mögen wir einige Bemerkungen über Flächen und Kurven mitteilen.

(1)

Die konvexe Ebenekurve c wird nun als differenzierbar vorausgesetzt.

Wenn die Sehnen der Länge stets gleiche m -mal Bogenstücke abschneiden, so folgt⁽¹⁾

$$(1) \quad (\xi_1 - \xi_2)^2 = m \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{\xi}^2 dt.$$

Aus (1) folgt

$$(2) \quad (\xi_1 - \xi_2)(\xi'_1 - \xi'_2 k) = m(\xi'_1 + \xi'_2 k)(\xi'_1 - \xi'_1 k),$$

daraus ergibt sich

$$(3) \quad \xi''_1 - \xi'_2 k = 0,$$

oder

$$(4) \quad \xi_1 - \xi_2 = m(\xi'_1 + \xi'_2 k).$$

Aus (3) erhält man

$$(5) \quad \xi_1 = \xi_2$$

und (4)

$$(6) \quad \{\xi_1 - \xi_2\} // \{\xi'_1 + \xi'_2 k\}.$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XVIII, No. 5, October, 1936.]

(1) GERICKE, H.: Einige kennzeichnende Eigenschaften des Kreises, Math. 80 (1935), S. 420.

(2)

1. Betrachten wir R.-Geometrie von dem Kreise nach äquivalenten Transformationen bezüglich der Urkurve. Es folgt⁽¹⁾

$$r = \varphi' + \frac{\chi(u)}{v},$$

wo r R.-Abstand ist.

Weiter kann man die Formeln in R.-Geometrie herleiten, weil⁽²⁾

$$\bar{u} = \varphi(u), \quad \bar{v} = \varphi'v + \chi(u),$$

$$\bar{v}' = -\frac{\chi'}{\varphi'} + \frac{\varphi''}{\varphi'} v + v'.$$

2. Wir betrachten R.-Geometrie von n Funktionen. Es kommt hervor

$$r = \int_1^1 \frac{\varphi}{\psi} dx = \frac{\psi}{\psi},$$

wo r R.-Abstand ist.

Für R.-Sphäre folgt

$$\int_0^1 \frac{\varphi}{\psi} dx = \frac{\varphi}{\psi} = \text{const.}$$

Aus INGOLDS⁽³⁾ Arbeit kann man die Formeln in R.-Geometrie herleiten.

3. Wir betrachten RICHESONS Arbeit⁽⁴⁾ in R.-Geometrie und erhalten

$$\sqrt{q_1 q_2} \lambda_{12}, \quad k \lambda'_{12} \sqrt{q'_1 q'_2} / \sqrt{q'_0 q'_1 q'_2} \lambda'_{01} \lambda'_{02}$$

anstatt

$$\lambda_{12}, \quad k \lambda'_{12} / \lambda'_{01} \lambda'_{02}.$$

(1) SCHFFEERS, G.: Isogonalkurven, Aquitangentialkurven und komplexe Zahlen, Math. Ann. 60, S. 491.

(2) Vergl. (1).

(3) INGOLD, L.: Geo. of a set of n functions, Annals of Math. 27, p. 495.

(4) RICHOSONS, A. W.: An Extension of BRAHMAGUPTAS Theorem, American Journ. of Math. LII (1930), p. 425.

Weiter können wir RICHESONS Arbeit in R.-Geometrie untersuchen.

4. Betrachten wir

$$(1) \quad f(u, v) \xi_u + g(u, v) \xi_v = h(u, v),$$

so erhalten wir

$$(2) \quad \begin{cases} f^2 E + 2fgF + g^2 G = h^2, \\ (fE + gF)(fF + gG) = h^2 F. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich

$$(fE + gF)(fF + gG) = (f^2 E + 2fgF + g^2 G) F,$$

$$\text{d. h.} \quad EG - F^2 = 0,$$

wo E, F, G erste Fundamentargrossen von ξ sind.

5. Man kann SYNGES Arbeit¹⁾ auf R.-Geometrie anwenden.

Weil sich aus SYNGES Arbeit ergibt

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{\nu_0}{\nu},$$

so folgt

$$\rho = \frac{\nu_0}{\nu},$$

wo ρ R.-Krümmungsradius ist,

Man kann die Theorie der Inversion in R.-Geometrie beweisen.

Setzen wir

$$\sqrt{q} R = \frac{a^2}{\sqrt{q'} R'}, \quad a = \text{const.}$$

oder

$$q ds = - \frac{q' ds'^2}{a^4}.$$

Setzen wir

1) SYNGE, J.L.: The Proportionality of Energy and Frequency for a Photon in General Relativity, Quarterly Journ. of Math. Vol. 6 (1935), p. 203.

$$\sqrt{q} R \equiv \xi, \quad \sqrt{q'} R = \xi'$$

so verhält sich wie in ROTHES Arbeit.⁽¹⁾

6. Setzen wir

$$r = \frac{p_i}{q_i} = (1-t) \frac{p_0}{q_0} + t \frac{p_1}{q_1},$$

oder

$$r = \frac{p_i}{q_i} = \sum_{i=0}^n c_i \frac{p_i}{q_i},$$

so erhalten wir

$$2I(\xi) = \oint r ds = \oint \left\{ (1-t) \frac{p_0}{q_0} + t \frac{p_1}{q_1} \right\} ds,$$

$$2I(\xi) = \oint \left\{ \sum_{i=0}^n \left(c_i \frac{p_i}{q_i} \right) \right\},$$

$$S = \oint r d\sigma = \oint \left\{ (1-t) \frac{p_0}{q_0} + t \frac{p_1}{q_1} \right\} d\sigma.$$

$$S = \oint \left\{ \sum_{i=0}^n \left(c_i \frac{p_i}{q_i} \right) \right\} d\sigma,$$

wo r R.-Abstand ist.

7. Es sei Γ eine konvexe Kurve in R_2 . Schreiben wir ein Rechteck zu Γ um. Sind zwei Strecken zwischen zwei Berührungspunkten, die gegenüberstehen, einander gleich, so besteht

$$(1) \quad b^s(\theta) + b^s(\theta) = b^s(\theta + \frac{\pi}{2}) + b^s(\theta + \frac{\pi}{2}),$$

daraus ergibt sich

$$(2) \quad [b(\theta) - b(\theta + \frac{\pi}{2})][b(\theta) + b(\theta + \frac{\pi}{2})] \\ + [b'(\theta) - b'(\theta + \frac{\pi}{2})][b'(\theta) + b'(\theta + \frac{\pi}{2})] = 0,$$

wo b die Breite von Γ ist.

Aus (2) folgt es, daß, wenn $b(\theta) = b'(\theta + \frac{\pi}{2})$ ist, so $b(\theta) = b(\theta + \frac{\pi}{2})$ besteht, weil $b(\theta) + b(\theta + \frac{\pi}{2}) > 0$ besteht.

(1) ROTHE, R.: Inversion und konforme Abbildung von Flächen, Math. Ann. 72, S. 57.

Nehmen wir $q(\varphi + \alpha)$ anstatt $q(\varphi)$ in Süß' Arbeit⁽¹⁾ und setzen wir

$$(3) \quad r(\varphi) = \frac{p(\varphi)}{q(\varphi + \alpha)} = \text{const.}$$

und

$$(4) \quad p(\varphi) + q(\varphi + \alpha) = \text{const.},$$

so müssen ξ und ϵ beide Kreise sein.

(4) ist die Bedingung dafür, dass ξ eine verallgemeinerte konstante Breite-Kurve ist, weil ξ die konstante Breite sein musz, wenn $p \equiv q$, $\alpha = 0$ ist.

(3)

1. Aus $dS = qds$ folgt

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} \frac{dS}{q^2} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{dx}{dS} \right) dS + \int_0^{2\pi} \left(\frac{dy}{dS} \right)^2 dS,$$

daraus ergibt sich

$$(2) \quad 2L = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + a_n'^2 + b_n^2 + b_n'^2),$$

$$(3) \quad 2(L - F) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \{ (n^2 - n) (a_n^2 + a_n'^2 + b_n^2 + b_n'^2) + n [(a_n - b_n')^2 + (a_n' + b_n)^2] \},$$

wo

$$(4) \quad \begin{cases} (ds)^2 = (dx)^2 + dy^2, \\ x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nS + a_n' \sin nS), \\ y = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nS + b_n' \sin nS), \\ F = \int x dy = \int_0^{2\pi} x \frac{dy}{dS} dS = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n b_n' - a_n' b_n). \end{cases}$$

(1) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeo, I, Jap. Journ. of Math. 4 (1927), p. 57.

Nach (3) kann man wissen, dass sich $L \geq F$ ergibt, wenn $L=F$ ist und hieraus erfolgt:

$$(5) \quad \begin{cases} a_1 = b'_1, & a'_1 = -b_1; \\ a_n = a'_n = b_n = b'_1 = 0, & (n > 1). \end{cases}$$

Daraus geht hervor

$$(6) \quad \begin{cases} x = a_0 + a_1 \cos S + a'_1 \sin S, \\ y = b_0 - a'_1 \cos S + a_1 \sin S, \end{cases}$$

d. h. γ ist ein Kreis.

2. Ist φ die Deviation von einer Ebenenkurve und

$$(1) \quad \tan \varphi = A(s) + B(s) \cdot \rho + C(s) \rho^2,$$

so ergibt sich

$$(2) \quad \frac{d\rho}{ds} = A(s) + B(s) \rho + C(s) \rho^2.$$

Nach (2) kann man wissen, dass, wenn

$$(3) \quad \rho = \frac{p(s)c + q(s)}{\pi(s)c + k(s)}, \quad c = \text{const.},$$

ist, so wir erhalten

$$(4) \quad \frac{\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_3}{\hat{\xi}_2 - \eta_3} : \frac{\eta_2 - \hat{\xi}_3}{\eta_2 - \eta_3} = -1,$$

wo $\hat{\xi}_i$, η_i Lösungen von ρ in (3), s Kurvenlänge und ρ Krümmungsradius ist.

Wir betrachten nun⁽¹⁾

$$(5) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}.$$

Wenn

$$(6) \quad \frac{d\rho}{ds} = 0$$

(1) MATUMURA, S.: Über einen affingeo. Satz und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ. 36 (1933) p. 189.

in (5) ist, so folgt

$$(7) \quad \tan \varphi = 0,$$

d. h. für die Spitze der Evolute fallen die gewöhnliche Normal und die Affinenormal miteinander zusammen.

Wenn wir mindestens vier Scheiteln in Eilinie haben, so besitzen wir mindestens vier Punkte, wofür die Affinenormal und die gewöhnliche Normal miteinander zusammenfallen.

$$(4)$$

1. Nun handelt es sich um die Einführung der R.-Geometrie in die Mechanik. Es besteht:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \frac{dS}{dt} = q \frac{ds}{dt}, \quad A = \frac{d^2S}{dt^2} = q \frac{d^2s}{dt^2}, \\ F = mq \frac{d^2s}{dt^2}, \quad I = mq \frac{ds}{dt} - m \left(q \frac{ds}{dt} \right)_0, \\ W = mq \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \sqrt{q_1 q_2} (\overline{x_1} - \overline{x_2})^2 \cos(\sqrt{\psi} \varphi), \\ E = \frac{1}{2} m \left\{ \left(q \frac{ds}{dt} \right)_2^2 - \frac{1}{2} m \left\{ \left(q \frac{ds}{dt} \right)_1^2 \right\} \right\}, \end{array} \right.$$

wo V Geschwindigkeit, A Beschleunigung, F Kraft, I Impulsgrösse, W Arbeit, E Energie und m Mass ist.

Wie in der elementaren ebenen Differentialgeometrie besteht auch in der relativen der folgende⁽¹⁾

Satz: Es sei ρ als Funktion von s gegeben, so wird die Kurve eindeutig bestimmt, abgesehen von der Bewegung, wo ρ der Krümmungsradius und s die Kurvenlänge ist.

Man kann leicht meine Arbeit⁽²⁾ in R.-Geometrie verallgemeinern.

1) Vergl. SUSS, W.: Zur relativen Differentialgeometrie, I. Japanese Journ. of Math. 4 (1927), p. 62.

KUBOTA, T.: Elementary differential Geometry, IWANAMI, 1934, p. 27.

2) MATUMURA, S.: On Oval, Journ. of the Mathematical Association of Japan for Secondary Education, Vol. XV, p. 131.

R.-Polarekoordinaten r, φ sind

$$(2) \quad r(\varphi) = \sqrt{q} R(\varphi).$$

Aus (2) folgt

$$\text{der Ebenenflächeninhalt} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{qR^2 d\varphi}{2}$$

$$\text{und die Ebenenkurvenlänge} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{qR^2 + \left(\frac{R}{2\sqrt{q}} \frac{dq}{d\varphi} + \sqrt{q} \frac{dR}{d\varphi} \right)^2} d\varphi.$$

2. Wir setzen

$$(1) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{n} \{p^{(1)} + p^{(2)} + \dots + p^{(n)}\}, \\ q = \frac{1}{n} \{q^{(1)} + q^{(2)} + \dots + q^{(n)}\} \end{cases}$$

in Süß' Arbeit.⁽¹⁾ Es geht hervor

$$(2) \quad r = \frac{1}{n} \sum p \Big/ \frac{1}{n} \sum q.$$

Ist R.-Abstand konstant, so folgt aus (2)

$$(3) \quad \sum p = \text{const.} \sum q.$$

Weiter haben wir

$$dS = \frac{1}{n^2} \sum q \cdot \sum ds,$$

$$d = \sqrt{\frac{1}{n^2} \{q_1^{(1)}q_1^{(1)} + q_1^{(2)}q_2^{(2)} + \dots\} [\{x_1^{(1)} - x_2^{(2)}\}^2 + \{x_1^{(2)} - x_2^{(3)}\}^2 + \dots]}$$

wo S R.-Kurvenlänge und d R.-Abstand ist.

Weiter kann man die Formeln I (x), ... erhalten.

Nach FUZIWARAS Satz⁽²⁾ kann man den folgenden Satz beweisen.

Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

(1) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeo. I, Jap. Journ. of Math. Vol. 4 (1927) p. 57.

(2) Vergl. Tôhoku Math. Journ. 5 (1914).

eine Raumkurve-Konstantenbreite zugleich R.-Konstantenbreite ist, ist⁽¹⁾ die

$$q_1 q_2 = \text{const.}$$

Man kann PALS Satz⁽²⁾ in R.-Geometrie beweisen.⁽³⁾

(5)

Satz : Wenn R.-Krümmungsradius konstant ist, so ist R.-Abstand konstant in Ebenegeometrie.

Beweis : Aus unsrer Voraussetzung ergibt sich⁽⁴⁾

$$(1) \quad \text{const.} = -\frac{\bar{\rho}(x)}{\rho(c)}.$$

Wir setzen nun

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{\rho}(x) = p(\theta) + p''(\theta), \\ \bar{\rho}(c) = P(\theta) + P'(\theta). \end{cases}$$

So folgt aus (1)

$$(3) \quad \phi(\theta) + \phi''(\theta) = 0,$$

wo

$$(4) \quad \phi(\theta) = p(\theta) - kP(\theta), \quad (k = \text{const.}).$$

Aus (3) ergibt sich

$$(5) \quad \phi(\theta) = 0,$$

daraus geht hervor

$$-\frac{p(\theta)}{P(\theta)} = k, \quad \text{w. z. b. w..}$$

Die Umkehrung von obigem Satz ist auch richtig.

(1) HIRAKAWA, J.: The Euclidean Relative Differential Geo. I, Proceedings of the Physico-Math. Society of Japan, Vol. 17 (1935), p. 513.

(2) Vergl. DANSKE Vidensk. Selsk. Forhandl. (1920).

(3) FUZIWARA, M.: Eilinen und Eiflächen, Tôkyo Buturigakko Zassi, 29, p. 382.

(4) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeo., I, Jap. Journ. of Math. 4 (1927), p. 57.

Fs sei eine Eilinie l' in R_2 gegeben und stetige Massen auf l' verteilt.

Ist $m(\theta)$ das Mass in dem Punkt, dessen Stützfunktion $p(\theta)$ ist, so bekommen wir

$$(6) \quad \int_0^\alpha mp' d\theta = [mp]_0^\alpha - \int_0^\alpha m' p d\theta.$$

Wenn

$$(7) \quad \int_0^\alpha mp d\theta = 0, \quad m' = \text{const.},$$

so folgt aus (6)

$$(8) \quad \int_0^\alpha p d\theta = [mp]_0^\alpha / m'.$$

(8) ist der Inhalt der Pedalkurve.

Besteht

$$(9) \quad r^2 + \rho^2 = \text{const.}$$

in l' , so folgt

$$(10) \quad p^2 + p'^2 + (p + p'')^2 = \text{const.},$$

daraus ergibt sich

$$(11) \quad (p + p')(2p' + p'') = 0,$$

wo r Radiusvektor vom Ursprung zu einem Punkt auf l' ist und ρ Radiusvektor in dem Punkt auf l' .

Wenn $\rho \neq 0$ ist, so folgt aus (11)

$$(12) \quad 2p' + p'' = 0,$$

$$(13) \quad \text{d. h. } \rho + p = \text{const.},$$

so erhält man den

Satz: Wenn (9) besteht, so folgt (13).

Die Umkehrung dieses Satzes ist auch richtig.

(6)

R. SRINIVASON hat⁽¹⁾

$$(1) \quad \rho = r \frac{dr}{dp}$$

bewiesen.⁽²⁾ Mit derselben Methode kann man

$$(2) \quad \begin{cases} dx' = -y \frac{pds}{r^2}, \\ dy' = x \frac{pds}{r^2} \end{cases}$$

erhalten.

Es seien zwei Raumkurven x, y in R_3 gegeben, dann kann man setzen⁽³⁾

$$\frac{\sin \theta(x) d\theta(x)}{\sin \phi(x) d\phi(x)} = \frac{\tau(x)}{\rho(x)} = \frac{\tau(y)}{\rho(y)} = \frac{\sin \theta(y) d\theta(y)}{\sin \phi(y) d\phi(y)},$$

daraus ergibt sich

$$\frac{\sin \theta(x) d\theta(x)}{\sin \phi(x) d\phi(x)} = \frac{\sin \theta(y) d\theta(y)}{\sin \phi(y) d\phi(y)},$$

wo θ, ϕ bzw. den Winkel, die Tangente, Binormale mit der festen Gerade bilden.

(7)

Betrachten wir R.-Geometrie von „A-Surface“ bezüglich einer „A-Surface.“ Es besteht⁽⁴⁾

(1) Indian Math. Society, 4 (1912), p. 61.

(2) Vergl. ANTIRADIALENS Arbeit in Handelingen van het Vlaamsch Natuur-en Geneeskundig Congres (Leuven) uitgegeven door het bestuur, (1912), 65-69.

(3) EISENHART, L. P.: A treatise on the differential geo. of curves and surfaces, p. 2.

MATUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (XI), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XV (1935), p. 175.

(4) EISENHART, L. P.: Surfaces with the some Spherical Representation of their Lines of Curvature as Pseudospherical Surfaces, American Journ. of Math. XXVII 1305', p. 113.

$$(1) \quad \int (e^a - e^{-a})(cV_1 - V_2) dv + (cU_1 - U_2) = 0$$

für R.-Sphäre, wo a, c zwei Konstanten sind.

Betrachten wir R.-Geometrie von „*moulure Surface*“ bezüglich einer „*moulure Surface*.“ Es besteht

$$(2) \quad r = \frac{\cos \omega \cdot U_1 - V_1}{\cos \omega \cdot U_2 + V_2},$$

wo r R.-Abstand ist. Für R.-Sphäre besteht

$$(3) \quad \cos \omega (U_1 + \text{const. } U_2) + (V_1 + \text{const. } V_2) = 0.$$

Man kann R.-Geometrie auf COOLIDGES Arbeit⁽¹⁾ und meine Arbeit⁽²⁾ anwenden.

Weiter kann man R.-Rotationsfläche betrachten, weil wir R.-Polarekoordinaten kennen.

Man kann R.-Geometrie auf CESAROS Buch⁽³⁾ anwenden.

Aus EISENHARTS Buch⁽⁴⁾ kann man wissen: wenn

$$-\frac{\partial^2 \log \cos \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} = 0,$$

sei, so ergebe sich

$$r = \frac{V_0 + \int U_0 \tan \omega du}{V_1 + \int U_1 \tan \omega du},$$

und wenn

$$-\frac{\partial^2 \log \sin \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} = 0,$$

sei, so erfolge

$$r = \frac{U_0 + \int V_0 \cot \omega dv}{U_1 + \int V_1 \cot \omega dv},$$

wo r R.-Abstand sei.

(1) COOLIDGE, J. L.: The fundamental theorem of celestial mechanics, *Annals of Math. Journ.* 26, p. 224.

(2) NAKAZIMA, S.: Einige Probleme über konvexe geschlossene Kurven und Flächen, *Tôhoku Math. Journ.* 26, p. 107, Satz. 3.

(3) CESARO, E.: Vorlesungen über natürliche Geometrie, 1926, S. 68, § 48.

(4) EISENHART, L. P.: Transformations of surfaces, Princeton. 1923, p. 73.

Weiter kann man RICHESONS Arbeit⁽¹⁾ in R.-Geometrie betrachten.

(8)

Wir betrachten nun

$$(1) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}$$

wieder.⁽²⁾ Es erfolgt

$$(2) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + r \frac{d^2 r}{dp^2} \right\} \frac{dp}{ds},$$

weil

$$(3) \quad p = r \frac{dr}{dp}$$

besteht.⁽³⁾

Aus (3) kann man

$$(4) \quad \rho = \frac{\bar{\rho}(x)}{\rho(c)} = \frac{d\{\bar{r}^2(x)\}}{dp} : \frac{d\{\bar{r}^2(c)\}}{dq}$$

herleiten, woraus folgt

$$(5) \quad \frac{d\{\bar{r}^2(x)\}}{dp} = 0$$

in dem Falle $\rho = 0$.

Auch besteht

$$(6) \quad \frac{d\{\bar{r}^2(x)\}}{dp} = \text{const.} \frac{d\{\bar{r}^2(c)\}}{dq}$$

für R.-Scheitel.

Benutzen wir (4), so können wir⁽⁴⁾

-
- (1) RICHESON, A. W.: An Extension of Brahmaguptas Theorem, American Journ. of Math. LII (1930), p. 425.
 (2) MATUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (IX), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XV, p. 120.
 (3) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik Bd. 46 (1916-18), S. 1083.
 (4) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeo., I, Jap. Journ. of Math. 4, S. 57.

$$I(\mathfrak{x}) = \oint r \rho d\sigma, \quad \frac{ds}{d\sigma} = \rho,$$

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{v}} = \rho^{\frac{2}{3}}, \quad S = \oint \rho d\sigma$$

in andere Form umschreiben.

(9)

Aus der wohlbekannten Formel

$$(1) \quad ds = q d\bar{s}$$

in R.-Geometrie kann man wissen, dasz

$$(2) \quad r_{11} du^2 + 2r_{12} dudv + r_{22} dv^2 = 0$$

R.-Minimallinie ist, wo

$$(3) \quad r_{11} : r_{12} : r_{22} = E : F : G$$

besteht.

E, F, G hier sind elementare Fundamentalgrößen erster Ordnung von \mathfrak{x} .

Bezeichnen wir mit r_{ik} R.-Fundamentalgrößen erster Ordnung von \mathfrak{x} bezüglich \mathfrak{c} , so besteht der folgende

Satz: Für die Tissoitschen Orthogonalsysteme für \mathfrak{x} bezüglich \mathfrak{c} besteht

$$\begin{vmatrix} du & -dudv & dv^2 \\ r_{11} & r_{12} & r_{22} \\ r_{11} & \bar{r}_{12} & \bar{r}_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Jetzt spielen r_{ik} dieselbe Rolle wie $(\theta_i \theta_k)$ in Kreisflächen.⁽¹⁾

Wir betrachten nun⁽²⁾

(1) NARAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Vol. II, S. 36.

(2) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeometrie, Jap. Journ. of Math., Vol. IV (1927), p. 59.

$$(4) \quad ds = q d\bar{s}(\xi).$$

Es erfolgt

$$(5) \quad L(R) = \int ds = \int q d\bar{s}(\xi) = q \int d\bar{s}(\xi) = \bar{q} L(\xi),$$

wo $L(R)$ R.-Umfang von ξ , $L(\xi)$ Umfang von ξ und \bar{q} Mittelwert von q ist.

Aus (5) ergibt sich

$$(6) \quad \bar{q} = \frac{L(R)}{L(\xi)}, \quad L(\xi) = \frac{L(R)}{\bar{q}},$$

woraus hervorgeht

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{L^2(R)}{4\pi \bar{q}^2} - A \geq 0, \\ 2A(\xi) = \bar{r} \oint ds = \bar{r} L(R) \end{cases}$$

wo A Inhalt von ξ , r R.-Abstand der ξ -Tangente und \bar{r} Mittelwert von r ist.

Die Formel

$$(8) \quad dI = k \sin \frac{r}{k} \cdot d\theta dr$$

in Nichteuklidischegeometrie⁽¹⁾ wird

$$(9) \quad dI = k \sin \frac{\sqrt{q} r}{k} d\theta \sqrt{q} dr.$$

$$(10)$$

Definieren wir ϕ in

$$(1) \quad \tan \phi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}$$

als R.-Deviation von Ebenerkurve, so folgt⁽²⁾

(1) NISIUTI, T.: Non euclidean Geo., Iwanami, (1935), p. 211.

(2) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeo., I, Jap. Journ. of Math. v (1927), p. 57.

$$(2) \quad \begin{cases} \rho = 3 \int \tan \phi \, ds, & S = 3 \oint (\int \tan \phi \, ds) \, d\sigma, \\ 2I(\xi) = 3 \int (\int \tan \phi \, ds) \, r \, d\sigma, \end{cases}$$

wo ρ R.-Krümmungsradius, s R.-Kurvenlänge sind.

Für R.-Scheitel besteht

$$(3) \quad \tan \phi = 0.$$

Um meine Arbeit⁽¹⁾ in R.-Geometrie zu betrachten, setzen wir

$$(4) \quad f(\xi, r) = \int_0^r \{ \sqrt{q_0 q} [\bar{\xi}(s) - \xi_0]^2 - r \}^2 ds,$$

dann erfolgt

$$(5) \quad f'_r = 0, \quad f'_\xi = 0, \quad \text{u. s. w..}$$

Weiter kann man wie in meiner Arbeit⁽¹⁾ erweitern, wo q eine Funktion von ξ und q_0 , ξ_0 Konstanten sind.

Die Gleichung des MINKOWSKIS Krümmungsbildes ist

$$(6) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = \bar{\rho}^{-\frac{1}{2}}(\varphi).$$

Betrachten wir R.-Geometrie von (6). Es besteht

$$\begin{aligned} r &= \bar{\rho}^{-\frac{1}{2}}(\xi) \cdot \bar{\rho}^{-\frac{1}{2}}(e), \quad dS = \bar{\rho}^{-\frac{1}{2}}(e) \, ds, \\ \rho &= \frac{\bar{\rho}^{\frac{3}{2}}(\xi) \{ 9\bar{\rho}^{\frac{3}{2}}(e) + 4\bar{\rho}^{\frac{3}{2}}(\xi) - 3\bar{\rho}(e)\bar{\rho}''(e) \}}{\bar{\rho}^{\frac{3}{2}}(\xi) \{ 9\bar{\rho}^{\frac{3}{2}}(e) + 4\bar{\rho}^{\frac{3}{2}}(e) - 3\bar{\rho}(e)\bar{\rho}'(e) \}}, \\ d &= \sqrt{\bar{\rho}^{-\frac{1}{2}}(\xi) \bar{\rho}^{-\frac{1}{2}}(e) (\xi_1 - \xi_2)^2}. \end{aligned}$$

Wenn $\rho = 0$, so ergibt sich

$$\bar{\rho}(e) = 0, \quad \bar{\rho}(\xi) = 0$$

oder eine Parabel.⁽²⁾

(1) NAKAZIMA, S.: The circle and the straight line nearest to given points, given straight lines or a given circle, Tôhoku Math. Journ. 19, p. 11.

(2) MOHRMANN, H.: Beständig gleichartig gekrümmte Kurven, Math. Ann. 72, S. 290.

BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XVII)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, Sept. 29, 1936.)

(1)

Im folgenden möchten wir die Kreisgeometrie untersuchen. \mathfrak{x} , \mathfrak{y} seien zwei Kreise in R_2 , und setzen wir nun

$$(1) \quad r = -\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}},$$

so erhalten wir

$$(2) \quad r = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})}, \text{ oder } r = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})}{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}.$$

Wenn \mathfrak{x} und \mathfrak{y} zueinander senkrecht sind, so folgt

$$(3) \quad r = 0, \text{ oder } r = \infty.$$

Ist $\hat{\mathfrak{z}}$ ein Kreis und \mathfrak{x} , \mathfrak{y} zwei nicht auf ihm gelegene Kreise, so sind

$$(4) \quad \begin{cases} \mathfrak{y} = 2 (\mathfrak{x}\hat{\mathfrak{z}}) \hat{\mathfrak{z}} - \mathfrak{x}, \\ \mathfrak{y} = 2 (\mathfrak{y}\hat{\mathfrak{z}}) \hat{\mathfrak{z}} - \mathfrak{y} \end{cases}$$

die zu \mathfrak{x} , \mathfrak{y} in bezug auf den Kreis $\hat{\mathfrak{z}}$ inversen Kreise.

Nehmen wir

$$(5) \quad r = \frac{2 (\mathfrak{x}\hat{\mathfrak{z}}) \hat{\mathfrak{z}} - \mathfrak{x}}{2 (\mathfrak{y}\hat{\mathfrak{z}}) \hat{\mathfrak{z}} - \mathfrak{y}},$$

so folgt

$$(6) \quad r = 1 - \frac{1}{2(\eta\hat{\xi})(\xi\hat{\xi})},$$

wenn ξ, η zueinander senkrecht sind.

Wenn ξ, η mit $\hat{\xi}$ den Winkel $\frac{\pi}{4}$ bilden, so ergibt sich aus (6)

$$(7) \quad r = 0.$$

Wenn $\hat{\xi}$ zu ξ und η senkrecht ist, so folgt aus (6)

$$(8) \quad r = -\infty.$$

Wenn ξ und η $\hat{\xi}$ berühren, so bekommen wir

$$(9) \quad r = \frac{1}{2}.$$

Setzen wir weiter

$$(10) \quad r = \frac{\alpha(\hat{\xi}\xi) + \beta(\eta\xi)}{\gamma(\xi\xi) + \delta(\eta\xi)},$$

dann folgt

$$(11) \quad r = \frac{\alpha}{\gamma} - \cos \phi,$$

wenn ξ und η zueinander senkrecht sind, wo ϕ der Winkel zwischen $\hat{\xi}$ und ξ ist.

Weiter kann man

$$(12) \quad r = \frac{2(\xi\hat{\xi})\hat{\xi} - \xi}{\eta},$$

$$r = \frac{\alpha\hat{\xi} + \beta\eta}{\eta}$$

betrachten.

Wir untersuchen nun wieder⁽¹⁾

$$(13) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta, \quad \cos^2 \phi = t^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

1: NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII Tôhoku Math. Journ. (1931), p. 195.

und setzen wir

$$(14) \quad r = \frac{\cos^2 \phi}{\cos^2 \varphi},$$

so ist r eine Funktion von ρ 's.

Ist $\partial r = 0$, so folgt

$$(15) \quad (t^{\alpha\beta} - r T^{\alpha\beta}) \rho_\beta = 0.$$

Sind alle ρ nicht gleich Null in (15), so muss r

$$(16) \quad \|t^{\alpha\beta} - r T^{\alpha\beta}\| = 0$$

erfüllen. (16) ist die sogenannte charakteristische Gleichung.

Sind ρ_α , ρ'_α zwei Lösungen von (15), die mit r , r' korrespondieren, so besteht⁽²⁾

$$(17) \quad T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho'_\beta = 0.$$

Die charakteristische Gleichung (16) hat zwei verschiedene oder gleiche reelle Wurzeln k_1 , k_2 .

(2)

$$(1) \quad \frac{dt}{d\tau} : \frac{dT}{dT} = - \frac{(\theta_\tau \theta_\tau)}{(\theta_i \theta_i)}.$$

ist die Bedingung dafür, dass zwei Richtungen

$$(2) \quad \frac{dt}{d\tau}, \frac{dT}{dT}$$

auf S zueinander senkrecht sind.

Ist

$$(3) \quad f\left(t, \tau, \frac{dt}{d\tau}\right) = 0$$

2) Vergl. PERSICO, C.: LEVI-CIVITAS The absolute differential Calculus, Cambridge (1939), p. 205.

die orthogonale Kurvenschar auf S, so ist

$$(4) \quad f\left(t, \tau, -\frac{(\theta_z, \theta_\tau)}{(\theta_t, \theta_t)} \frac{dt}{d\tau}\right) = 0$$

die orthogonale Trajektorie auf S von (3).

Sind $t = \text{const.}$ und $\tau = \text{const.}$ zueinander nicht senkrecht, so besteht statt (1)

$$(\theta_t, \theta_t) \frac{dt}{d\tau} + (\theta_z, \theta_z) \left\{ \frac{dt}{d\tau} + \frac{dT}{dT'} \right\} + (\theta_z, \theta_z) = 0.$$

Es seien⁽¹⁾

$$t = \text{const.}, \quad \tau = \text{const.}$$

zwei orthogonale Kurvenscharen auf einer Kreisfläche S. Dann bildet

$$(5) \quad \frac{dt}{d\tau} = \left[\frac{(\theta_z, \theta_z)}{(\theta_t, \theta_t)} \right]^{\frac{1}{2}} \tan \alpha$$

die Kurvenschar auf S dar, die $t = \text{const.}$ mit dem Winkel α schneidet.

Aus (1) kann man untersuchen wie in der elementaren differentialen Rechnung, z. B. $\frac{dt}{d\tau} = 0$ gibt Maximum-oder Minimumwerte von t , oder man kann untersuchen die Bedingung dafür, dass sich

$$\begin{aligned} & t = f(\tau) \\ \text{und} \quad & t = \phi(\tau) \end{aligned}$$

in n -ter Ordnung aneinander schmiegen.

Setzen wir 2α statt α in (1), so erhalten wir

$$(6) \quad \frac{dT}{dT'} = \left[\frac{(\theta_z, \theta_z)}{(\theta_t, \theta_t)} \right]^{\frac{1}{2}} \tan 2\alpha.$$

1 FORSYTH, A. R.: Lectures on the Differentialgeometry of curves and surfaces, Cambridge (1920), p. 62.

Aus (1), (2) folgt

$$(7) \quad \frac{dT}{dT} = 2 \left[\frac{(\theta_z, \theta_z)}{(\theta_t, \theta_t)} \right] \left[\frac{dt}{d\tau} \right] - \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

(3) ist die Beziehung, die zwischen $\frac{dT}{dT}$ und $\frac{dt}{d\tau}$ bestehen muss.

$$T - t = \left[\frac{(\theta_z, \theta_z)}{(\theta_t, \theta_t)} \right]^{\frac{1}{2}} \tan \alpha \{ T - \tau \}$$

ist die Gleichung der Tangente und

$$T - t = - \left[\frac{(\theta_z, \theta_z)}{(\theta_t, \theta_t)} \right]^{\frac{1}{2}} \{ \tan \alpha \} \{ T - \tau \}$$

ist die Gleichung der Normale zu unserer Kurve auf S.

(3)

Die Minimallinie auf der Kreisfläche S ist

$$(1) \quad (\theta_t, \theta_t) dt^2 + 2 (\theta_t, \theta_z) dt d\tau + (\theta_z, \theta_z) d\tau^2 = 0.$$

Ist φ der Winkel zwischen zwei Richtungen von (1), so besteht⁽¹⁾

$$(2) \quad \tan \varphi = \frac{\sqrt{(\theta_t, \theta_t)(\theta_z, \theta_z) - (\theta_t, \theta_z)^2}}{2 (\theta_t, \theta_t) (\theta_z, \theta_z) - (\theta_t, \theta_z)^2}.$$

Man kann unsere Kreisgeometrie auf BLASCHKE Arbeit⁽²⁾ anwenden.

Wenn $(\theta_t, \theta_t) + (\theta_z, \theta_z) = 2 (\theta_t, \theta_z)$ besteht, so kommt $(\theta_t, \theta_t) = (\theta_z, \theta_z)$ hervor und daraus ergibt sich

$$(3) \quad (\theta_t, \theta_t) = (\theta_t, \theta_z) = (\theta_z, \theta_z).$$

Man kann also sagen, wenn $(\theta_t, \theta_t) + (\theta_z, \theta_z) = 2 (\theta_t, \theta_z)$ bestche, so folge daraus

(1) WEATHERBURN, C. E.: Differentialgeometry 1927., p. 57.

(2) BLASCHKE, W.: Integralgeo., Actualite's scientifiques et Industrielles, 252 Paris.

$$(4) \quad \tan \psi = 0.$$

$$(5) \quad 2(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) = (\theta_t \theta_\tau)^2$$

ist die Bedingung dafür, dass

$$(6) \quad \tan \psi = \infty$$

besteht.

Betrachten wir⁽³⁾

$$(7) \quad (\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0$$

anstatt $G_{hk} du^h du^k$ in TAKASU Arbeit.⁽⁴⁾ Es bestehen ähnliche Sätze auch wie in TAKASU Arbeit.⁽⁴⁾

Wenn

$$(8) \quad (\theta_t \theta_t) = \frac{t}{\tau}, \quad (\theta_t \theta_\tau) = -2\tau$$

in unserer Kreisfläche S besteht, so geht hervor

$$(9) \quad K = \frac{1}{9 \left[\frac{(\theta_t \theta_\tau)^2}{4} - 1 \right]^2},$$

wo K das Krümmungsmass von S ist.

S ist eine Biegungsfläche einer der Translationsflächen.⁽⁵⁾

Die Gleichung der Minimallinie auf Kreisfläche S ist

$$(\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0.$$

Aus zwei Paaren der Lösungen $k_1, k_2; k_1', k_2'$ von

$$d\tau \partial\tau - k(dt \partial\tau + \partial t d\tau) + k^2 dt \partial t = 0,$$

bilden wir

(3) NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von MOBIUS, Mem. of Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Vol. II, 1929, p. 36.

(4) TAKASU, T.: Differentialkugelgeo., XVI, Science Report of the Tôhoku Imp. Univ. Vol. XXIV, 1936, p. 643.

(5) JONAS, H.: Aufstellung einer Transformationstheorie für eine neue Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen, Math. Ann. 92 (1924), S. 920.

$$I \equiv \frac{k_1 - k_1'}{k_2 - k_1'} : \frac{k_1 - k_2'}{k_2 - k_2'},$$

wo

$$(\theta_i \theta_i) + 2 (\theta_i \theta_\tau) k + (\theta_\tau \theta_\tau) k^2 = 0$$

ist.

Ist ω der Winkel zwischen zwei Richtungen $\frac{d\tau}{dt}$ und $\frac{\partial \tau}{\partial t}$ auf

S, so ist nach LAGUERRE

$$\omega = \frac{1}{2i} \log I, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Dies ist die Definition eines Winkels auf S.

(4)

Ziehen wir zwei Kurven

$$(1) \quad \phi(t, \tau) = c, \quad \psi(t, \tau) = c'$$

auf einer Kreisfläche, so bekommen wir

$$(2) \quad \cos \chi$$

$$= \frac{(\theta_i \theta_i) \phi_2 \phi_2 - (\theta_i \theta_\tau) (\phi_2 \phi_1 + \phi_2 \phi_1) + (\theta_\tau \theta_\tau) \phi_1 \phi_1}{\{(\theta_i \theta_i) \phi_2^2 - 2(\theta_i \theta_\tau) \phi_2 \phi_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) \phi_1^2\}^{\frac{1}{2}} \{(\theta_i \theta_i) \phi_2^2 - 2(\theta_i \theta_\tau) \phi_2 \phi_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) \phi_1^2\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$(3) \quad \sin \chi$$

$$= \frac{\{(\theta_i \theta_i) (\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2\} (\phi_2 \phi_1 - \phi_2 \phi_1)}{\{(\theta_i \theta_i) \phi_2^2 - 2(\theta_i \theta_\tau) \phi_2 \phi_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) \phi_1^2\}^{\frac{1}{2}} \{(\theta_i \theta_i) \phi_2^2 - 2(\theta_i \theta_\tau) \phi_2 \phi_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) \phi_1^2\}^{\frac{1}{2}}},$$

wo χ der Winkel zwischen zwei Kurven ϕ und ψ , c und c' zwei Konstanten und

$$(4) \quad \phi_1 = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \phi_2 = \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \quad \psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \psi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

1 FORSYTH, A. R: Lectures on the Differentialgeo. of curves and surfaces, Cambridge 1920, p. 35.

sind. Ziehen wir drei Kurven

$$(5) \quad \alpha(t, \tau) = c', \quad \beta(t, \tau) = c', \quad \gamma(t, \tau) = b'',$$

so erhalten wir

$$(6) \quad \sin \chi_1 : \sin \chi_2 : \sin \chi_3$$

$$= \frac{a_2 \beta_1 - \beta_2 a_1}{\left\{ (\theta_t \theta_t) a_2^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) a_2 a_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) a_1^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ (\theta_t \theta_t) \beta_2^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) \beta_2 \beta_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) \beta_1^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$: \frac{\beta_2 \gamma_1 - \gamma_2 \beta_1}{\left\{ (\theta_t \theta_t) \beta_2^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) \beta_2 \beta_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) \beta_1^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ (\theta_t \theta_t) \gamma_2^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) \gamma_2 \gamma_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) \gamma_1^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$: \frac{\gamma_2 a_1 - a_2 \gamma_1}{\left\{ (\theta_t \theta_t) \gamma_2^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) \gamma_2 \gamma_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) \gamma_1^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ (\theta_t \theta_t) a_2^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) a_2 a_1 + (\theta_\tau \theta_\tau) a_1^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

wo χ_1, χ_2, χ_3 bzw. die Winkel zwischen $\alpha, \beta; \beta, \gamma$ und γ, α sind. (6) ist Sinussatz auf der Kreisfläche.

Ist ω der Winkel zwischen zwei Richtungen in

$$\theta dt^2 + 2\phi dt d\tau + \psi d\tau^2 = 0$$

auf S, so besteht⁽²⁾

$$(7) \quad \frac{\sin \omega}{2\sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2}} \left\{ \phi^2 - \theta \psi \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\cos \omega}{(\theta_t \theta_t) \psi - 2(\theta_t \theta_\tau) \phi + (\theta_\tau \theta_\tau) \theta}.$$

Nach (7) kann man wissen, dass

$$(8) \quad (\theta_t \theta_t) \psi - 2(\theta_t \theta_\tau) \phi + (\theta_\tau \theta_\tau) \theta = 0$$

die Bedingung ist dafür, dass unsere zwei Richtungen zueinander senkrecht sind.

Die Kurvenschar, die zu der Kurvenschar $f(t, \tau) = \alpha$ auf S senkrecht ist, wird mit

(2) 1. c. (1).

$$(9) \quad \left\{ (\theta_t \theta_t) \frac{\partial f}{\partial \tau} - (\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial f}{\partial t} \right\} dt + \left\{ (\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial f}{\partial \tau} - (\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial f}{\partial t} \right\} d\tau = 0$$

gegeben, wo α Parameter ist.

Aus (9) folgt

$$(10) \quad p \equiv \frac{dt}{d\tau} = \frac{-(\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial f}{\partial \tau} + (\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial f}{\partial t}}{(\theta_t \theta_t) \frac{\partial f}{\partial \tau} - (\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial f}{\partial t}}$$

und es ist

$$(11) \quad F \left(t, \tau, \frac{p-m}{1+mp} \right) = 0$$

Schieftrajektorie zu

$$(12) \quad F(t, \tau, p) = 0,$$

wo m eine Konstante ist.

Nach (7) kann man wissen, wenn

$$(13) \quad \varphi^2 = \theta \psi$$

sei, so folge

$$(14) \quad \omega = 0$$

und wenn

$$(15) \quad \omega = -\frac{\pi}{4}$$

sei, so bestehe

$$(16) \quad (\theta_t \theta_t) \psi - 2(\theta_t \theta_\tau) \varphi + (\theta_\tau \theta_\tau) \theta \\ = 2 \left\{ (\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 - \theta \psi)^{\frac{1}{2}}.$$

(5)

Betrachten wir

$$(1) \quad F(x^I, x^{II}, x^{III}) = 0,$$

wo x^a Kugeln in R_3 sind.

(1) bezeichnet ein Kurvenpaar in R_3 .

Aus (1) folgt

$$(2) \quad F_i dx^i = 0,$$

wo

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = F_i$$

sind.

Der Vektor F_i heisst Gradient des Skalars F .

Da (2) für alle Kurvenvektoren dx^i gilt, steht F_i auf der dx^i senkrecht.

Zwei Richtungen dx^i und δx^i stehen aufeinander senkrecht, wenn

$$dx^i \delta x^i = 0$$

ist.

Mit

$$ds^2 = dx^i dx^i$$

definieren wir das Bogenelement der Kurve (1), wobei die dx^i der Gleichung (2) zu genügen haben, und mit

$$d\sigma^2 = d\nu_i d\nu_i$$

definieren wir das sphärische Bild von (1), wo

$$\nu_i = \frac{F_i}{\sqrt{F_j F_j}},$$

$$d\nu_i = \frac{\partial \nu_i}{\partial x_k} dx_k = \frac{1}{\sqrt{(F_j F_j)^2}} (F_j F_j F_{ik} - F_i F_j F_{jk}) dx_k$$

sind.

Aus

$$\nu_i \nu_i = 1$$

folgt

$$\nu_i d\nu_i = 0,$$

$$\nu_i \frac{\partial \nu_i}{\partial x_k} dx_k = 0$$

und da diese Relation identisch in den dx_k gilt, geht weiter hervor

$$\nu_i \frac{\partial \nu_i}{\partial x_k} = 0$$

und daraus folgt durch die Elimination der ν_i

$$\left| \frac{\partial \nu_i}{\partial x_k} \right| = \varepsilon_{ikl} \frac{\partial \nu_1}{\partial x_l} \frac{\partial \nu_2}{\partial x_k} \frac{\partial \nu_3}{\partial x_i} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{pqr} \frac{\partial \nu_p}{\partial x_l} \frac{\partial \nu_q}{\partial x_k} \frac{\partial \nu_r}{\partial x_i} = 0.$$

Nun betrachten wir

$$x_i = x_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3), \quad \eta_i = \eta_i(x_1, x_2, x_3),$$

und setzen wir

$$ds^2 = dx_i dx_i,$$

so erhalten wir

$$ds^2 = g_{ik} d\eta_i d\eta_k,$$

wo

$$\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} = g_{ik},$$

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} d\eta_j.$$

Wir untersuchen insbesondere orthogonale Kugeln η_i , wofür

$$g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0$$

notwendig und hinreichend ist.

Die Koordinatenkugeln

$$\vartheta_1(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$$

bilden dann ein sogenanntes dreifach orthogonales Kugelsystem.

(6)

L, M, N seien Fundamentalgrößen zweier Ordnungen der Kreisfläche $x = x(t, \tau)$, so ist die Differentialgleichung der Krümmungskurven

$$\begin{vmatrix} d\tau^2 & (\theta, \theta_t) & L \\ -dt d\tau & (\theta, \theta_\tau) & M \\ dt^2 & (\theta_\tau, \theta_\tau) & N \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\begin{vmatrix} (\theta, \theta_t) dt + (\theta, \theta_\tau) d\tau & L dt + M d\tau \\ (\theta_\tau, \theta_\tau) dt + (\theta_\tau, \theta_\tau) d\tau & M dt + N d\tau \end{vmatrix} = 0.$$

k_1, k_2 seien die Werte von $d\tau : dt$ für die beiden Hauptkrümmungsrichtungen, so besteht

$$\begin{vmatrix} k^2 & (\theta, \theta_t) & L \\ -k & (\theta, \theta_\tau) & M \\ l & (\theta_\tau, \theta_\tau) & N \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\begin{aligned} & [(\theta, \theta_t) M - (\theta, \theta_\tau) L] - [(\theta_\tau, \theta_\tau) L - (\theta_t, \theta_t) N] k \\ & + [(\theta_t, \theta_\tau) N - (\theta_\tau, \theta_\tau) M] k^2 = 0 \end{aligned}$$

für $k = k_1, k_2$.

Betrachten wir nun Liouvilles Kreisfläche. Wir erhalten

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{(\theta_t, \theta_t)}} \frac{d\tau}{dt},$$

wo θ in EISENHART Buch⁽¹⁾ steht.

1) EISENHART, L. P.: A treatise on the differential geometry of curves and surfaces, p. 218.

(7)

Es seien zwei Kugeln $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ in R_3 gegeben, so ist

$$(1) \quad \mathfrak{z} = \lambda \mathfrak{x} + \mu \mathfrak{y}$$

ein Kugelbüschel in R_3 , wo λ und μ Skalargrößen sind.

Ist

$$\cos \hat{\mathfrak{x}}\mathfrak{z} = \pm \cos \hat{\mathfrak{y}}\mathfrak{z},$$

so geht hervor

$$\frac{(\mathfrak{x}, \lambda \mathfrak{x} + \mu \mathfrak{y})}{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})} \sqrt{(\lambda \mathfrak{x} + \mu \mathfrak{y}, \lambda \mathfrak{x} + \mu \mathfrak{y})}} = \pm \frac{(\mathfrak{y}, \lambda \mathfrak{x} + \mu \mathfrak{y})}{\sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})} \sqrt{(\lambda \mathfrak{x} + \mu \mathfrak{y}, \lambda \mathfrak{x} + \mu \mathfrak{y})}},$$

$$\text{i. e.} \quad \frac{\lambda^2}{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})} [(\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\mathfrak{y}\mathfrak{y}) - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2] = \frac{\mu^2}{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})} [(\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\mathfrak{y}\mathfrak{y}) - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2],$$

so folgt

$$(2) \quad \lambda : \mu = \frac{1}{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} : \pm \frac{1}{\sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}},$$

wo

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\mathfrak{y}\mathfrak{y}) - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2 \neq 0$$

ist.

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} + \frac{\mathfrak{y}}{\sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}}, \\ \mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} - \frac{\mathfrak{y}}{\sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}}. \end{cases}$$

Wegen (3) besteht $(\mathfrak{z}\mathfrak{z})=0$, folglich müssen \mathfrak{z} und $\bar{\mathfrak{z}}$ *zueinander senkrecht sein*.

Wir wollen (3) halbiierende Kugel (abgekürzt *h*-Kugel) von \mathfrak{x} und \mathfrak{y} nennen.

$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ *seien drei gegebene Kugeln in R_3 , so ist die Bedingung*

dafür, dass eine Kugel v zu sechs h -Kugeln senkrecht ist, die zwischen $x, y; y, z$ und x, z gebildet sind, die

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{(yv)}{\sqrt{(yy)}} \pm \frac{(zv)}{\sqrt{(zz)}} = 0, \\ \frac{(zv)}{\sqrt{(zz)}} \pm \frac{(xy)}{\sqrt{(xx)}} = 0, \\ \frac{(xy)}{\sqrt{(xx)}} \pm \frac{(yv)}{\sqrt{(yy)}} = 0. \end{cases}$$

(8)

1. Es seien α, \mathfrak{B} zwei gegebene Kreise im R_2 und φ_1, φ_2 zwei gegebene Winkeln. Nun betrachten wir die Kreise x , wo

$$(1) \quad \lambda f + \mu \varphi = 0$$

bestehen. Hier sind

$$(2) \quad \begin{cases} f = (\alpha x)^2 - (\alpha\alpha)(xx) \cos^2 \varphi_1 = 0, \\ \varphi = (\mathfrak{B}x)^2 - (\mathfrak{B}\mathfrak{B})(xx) \cos^2 \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

und λ, μ Parameter.

Setzen wir

$$(3) \quad \lambda : \mu = (\mathfrak{B}\mathfrak{B}) \cos^2 \varphi_2 : -(\alpha\alpha) \cos^2 \varphi_1,$$

so folgt aus (1)

$$(4) \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{B})(\alpha x)^2 \cos^2 \varphi_2 - (\alpha\alpha)(\mathfrak{B}x)^2 \cos^2 \varphi_1 = 0.$$

Aus (4) ergibt sich

$$(5) \quad \begin{cases} \sqrt{(\mathfrak{B}\mathfrak{B})} (\alpha x) \cos \varphi_2 - \sqrt{(\alpha\alpha)} (\mathfrak{B}x) \cos \varphi_1 = 0, \\ \sqrt{(\mathfrak{B}\mathfrak{B})} (\alpha x) \cos \varphi_2 + \sqrt{(\alpha\alpha)} (\mathfrak{B}x) \cos \varphi_1 = 0. \end{cases}$$

An den Kreisen x in (5) sitzen die Schnittpunkte der Kreise α und \mathfrak{B} , wo

$$(6) \quad (\alpha \bar{x}) = 0, \quad (\mathfrak{B} \bar{x}) = 0$$

bestehen und die *harmonische Trennung* auch.

Nun wollen wir x in (5) r -Kreise von \bar{x} nennen.

2. Betrachten wir die Kreise x in R_2 , wo

$$(7) \quad \begin{cases} (\alpha x)^2 - (\alpha \alpha) (xx) \cos^2 \varphi_1 = 0, \\ (\mathfrak{B} x)^2 - (\mathfrak{B} \mathfrak{B}) (xx) \cos^2 \varphi_2 = 0, \\ (\mathfrak{C} x)^2 - (\mathfrak{C} \mathfrak{C}) (xx) \cos^2 \varphi_3 = 0 \end{cases}$$

bestehen, α , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} drei gegebene Kreise im R_2 und φ_i gegebene Winkeln sind. Aus (7) bilden wir r -Kreise, daraus ergibt sich

$$(8) \quad \begin{cases} (\mathfrak{B} x) \sqrt{(\mathfrak{C} \mathfrak{C})} \cos \varphi_3 \pm (\mathfrak{C} x) \sqrt{(\mathfrak{B} \mathfrak{B})} \cos \varphi_2 = 0, \\ (\mathfrak{C} x) \sqrt{(\alpha \alpha)} \cos \varphi_1 \pm (\alpha x) \sqrt{(\mathfrak{C} \mathfrak{C})} \cos \varphi_3 = 0, \\ (\alpha x) \sqrt{(\mathfrak{B} \mathfrak{B})} \cos \varphi_2 \pm (\mathfrak{B} x) \sqrt{(\alpha \alpha)} \cos \varphi_1 = 0. \end{cases}$$

Aus (8) nehmen wir

$$(9) \quad \begin{cases} (\mathfrak{B} x) \sqrt{(\mathfrak{C} \mathfrak{C})} \cos \varphi_3 + (\mathfrak{C} x) \sqrt{(\mathfrak{B} \mathfrak{B})} \cos \varphi_2 = 0, \\ (\mathfrak{C} x) \sqrt{(\alpha \alpha)} \cos \varphi_1 + (\alpha x) \sqrt{(\mathfrak{C} \mathfrak{C})} \cos \varphi_3 = 0, \\ (\alpha x) \sqrt{(\mathfrak{B} \mathfrak{B})} \cos \varphi_2 - (\mathfrak{B} x) \sqrt{(\alpha \alpha)} \cos \varphi_1 = 0. \end{cases}$$

also gehen die Kreise in (9) auf ein und denselben Punkt.

THE EFFECT OF TEMPERATURE AND WATER VAPOUR ON DIFFUSION-COEFFICIENTS OF IONS IN AIR

(With 6 Text Figures)

Kazuo OGASAHARA

(Accepted for publication, October 15, 1936)

(I) Introduction

The present work was done for the purpose of researching the effect of temperature and humidity on the diffusion coefficients of ions in air under the direction and guidance of Prof. K. SHIRATORI by the improved TOWNSEND-method. The determinations of the coefficient of diffusion of positive and negative ions in gases were first made by T. S. TOWNSEND,⁽¹⁾⁽²⁾ and then further studies were dedicated, under Townsend's principle, by FRANCK, WESTPHAL,⁽³⁾ SALLES⁽⁴⁾ and others. Recently, from the experiment for examining the effect of water vapour on the diffusion coefficients by means of the modified Townsend's method, J. J. NOLAN⁽⁵⁾ concluded that, the diffusion coefficients of ions of both signs show irregular periodic variations with vapour-tension; at the same time he confirmed this fact by the indirect measurement from mobilities of ions observed by the Rutherford-Child's method. He thought that, such irregular periodic variations seem to depend only upon the effect of the intensity of electric field; in fact such the variations disappear when the field increases from 1.0 to 1.4 volts per centimeter. Since the experiments of Townsend, it has been admitted that the ordinary small ions may possess very different properties in a weak field and vary with the content of mois-

ture sensitively, though formerly there is no mature consideration for the state of "dry" or "moist." NOLAN's⁽⁵⁾ experiments covered the range of vapour-tension from 0 mm. to 15 mm., and he tried to apply these results to the atmospherical electric field as such like that "if we considered that the potential gradient in the atmosphere near the ground is, in many places, of the order of 1 volt per centimeter, the considerable variations in atmospheric conductivity may therefore be expected to occur in such places owing to the changes of ionic mobility with small changes in humidity."

Now in order to get systematic observations of the effect of temperature and humidity on diffusion coefficients as exact as possible, this experiment was carried out in the special thermo-hygro-regulating room of Prof. SHIRATORI's Institute and the measurements were over the range from -15°C to 45°C for every step of 5°C degrees in temperature and over the vast range of humidity between 15% and 97% by controlling the thermo-hygro-regulator.

(2) Method and apparatus

The TOWNSEND's principle is that the rate of diffusion of ions into a gas is calculated from comparative observations of the loss of conductivity of the gas when the gas passed along two systems of the metallic narrow tubes of different length each other. But the loss even in the narrow tubes is not entirely due to diffusion into the walls of the tube, a certain small part will be due to the recombination between ions of opposite sign and also between ions and uncharged nucleus, and due to the effects of the electric fields of the boundary. Therefore, the measurement by means of TOWNSEND's principle must be necessary to carry under the condition of making the loss due to diffusion much greater than the loss due to the other causes, and the results should be corrected. The accuracy of the measurements depends upon these factors; as the errors due to recombination and mutual repulsion are proportional to the density of ions and inversely proportional to the diameter of tube, a small density of ions and nar-

row tubings are requested, though these conditions are decided co-relatively with the capacity and sensibility of the electrometer used.

If the conductivity of a gas, contained ions uniformly distributed in it, is " λ_1 ", after passing through one tube of length " l_1 " and " λ_2 " after passing through the other tube of length " l_2 ", then, according to Townsend, we get the following relationship,

TABLE I.
Connection between D and y when $l_1/l_2=4$.

$x = \frac{7.31 D l_1}{2a^2 V}$	$y = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$	$y_n - y_{n+1} = \Delta y$	$x = \frac{7.31 D l_1}{2a^2 V}$	$y = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$	$y_n - y_{n+1} = \Delta y$
0.3	0.7563				
0.4	0.7009	0.0554	2.0	0.2210	0.0169
0.5	0.6515	0.0494	2.1	0.2053	0.0157
0.6	0.6065	0.0450	2.2	0.1906	0.0147
0.7	0.5651	0.0414	2.3	0.1770	0.0136
0.8	0.5265	0.0386	2.4	0.1643	0.0127
0.9	0.4906	0.0359	2.5	0.1526	0.0117
1.0	0.4570	0.0336	2.6	0.1416	0.0110
1.1	0.4255	0.0315	2.7	0.1315	0.0101
1.2	0.3961	0.0294	2.8	0.1220	0.0095
1.3	0.3686	0.0275	2.9	0.1133	0.0087
1.4	0.3429	0.0257	3.0	0.1051	0.0082
1.5	0.3189	0.0240	3.1	0.0976	0.0075
1.6	0.2964	0.0225	3.2	0.0905	0.0071
1.7	0.2755	0.0209	3.3	0.0840	0.0066
1.8	0.2561	0.0194	3.4	0.0780	0.0060
1.9	0.2379	0.0182	3.5	0.0723	0.0057
			3.6	0.0671	0.0052

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{0.195 e^{-\frac{7.31 D l_1}{2a^2 V}} + 0.024 e^{-\frac{44.5 D l_1}{2a^2 V}}}{0.195 e^{-\frac{7.31 D l_2}{2a^2 V}} + 0.024 e^{-\frac{44.5 D l_2}{2a^2 V}}} \dots\dots\dots (2)$$

where "D" is the diffusion coefficient of ions of the sign measured,

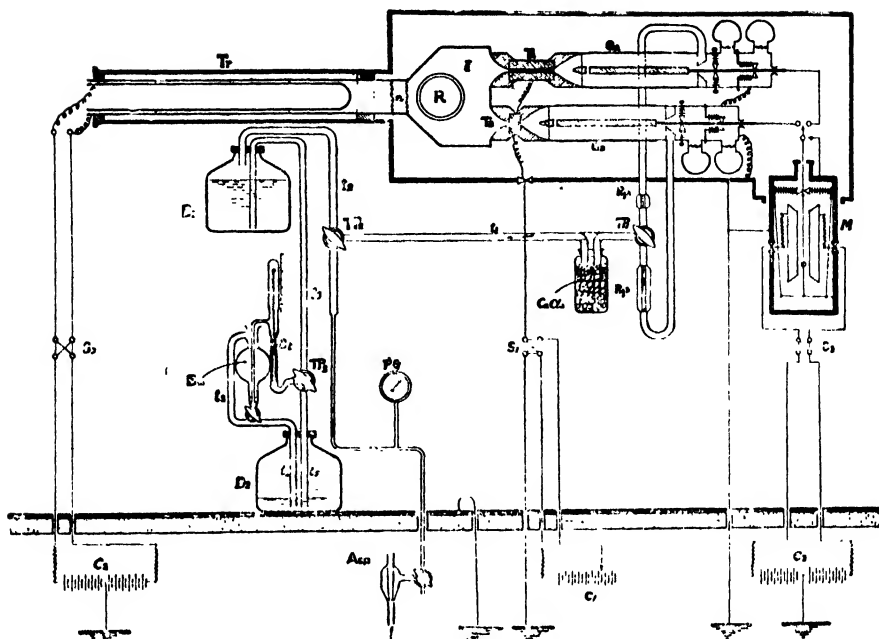
each other, so that the gas may not be affected by any external electric field. An entrance "G" and an outlet "A" of the tubing system are made into the form of stream-line to avoid eddy disturbances in the flow of gas. A front condenser "C" is added for protecting the capillary system from the effect of the electric field of Gerdin-system.

On the construction of the Gerdin-tube, the support of the inner electrode "EE" and leading "MM" was modified to be connected in an axial line straightly and rigidly, and was made enough strong against the external mechanical shocks. The leading "MM" coated with special insulation-laquer was supported by an ebonite plug "Q" and pins "P." The "Q" is screwed into the brass block "J," and the leading rod was passing along the inside of the plug through the centre of an ambroid button "S." The grooved ebonite pin with a small piece of an ambroid cap is fixed on the brass screw which set into the brass cylinder "BB." The centering of the inner electrode can be exactly adjusted by adjusting these three screws. Brass cover "BK" is insulated from "AA" by a piece of mica and connected to earth. "DD" is the dryer which contains metallic natorium, and protects the high insulation from the effect of moisture. The plug "Q" is also covered by a short tube "K" to avoid the influence of dust, water vapour and external electric disturbances. "R" was a drum fitted exactly into the outer tube "BB," which has eight holes at the side of Gerdin-tube and aparts with a clearance $\frac{1}{2}$ mm. from the inner electrode; the purpose of this drum is to let the flow of air be laminar and to keep the leading "MM" free from the running air which enters from the eight holes into "R" and run out from the tube "G." "R_{gA}" and "R_{gB}" are capillary-sets which are just same with "T_A" and "T_B," and are used as register-tubes.

If the voltage of the outer electrode is 100 volts, and the volume-rate of the air flow is 8.5 c.c./sec., then the limiting mobility "W" of ions caught by the condenser is

$$W = 4.7 \times 10^{-3} \text{ cm./sec : volt/cm.}$$

Fig. 2.



In Fig. 2, "I" is an ionization chamber, inside of which an ionium ionizer "R" is set. In order to prevent the effect of contamination of the apparatus by volatilisation of the ionium this ionizer is covered with a thin film of collodion.

Ions and dusts contained in aspirated air are filtered electrically by the ion trap "T," which consists of two co-axial brass cylinders with the clearance of about $\frac{1}{2}$ mm. apart, and about 50 cm. in length. Thus the air flows in this annular space and passes through the electric field of about 4000 volt/cm. in the trap. Now let the velocity of the air-flow between the annular space be 2.5 cm./sec., then the limiting mobility of ions in the trap is 2.3×10^{-5} cm./sec. : vot./cm. : therefore nearly all of the ions may be trapped off. Two sheets of fine nets "n" soldered parallel to each other at a distance 5 mm. apart, are put across the entrance of the ionization-chamber to let it keep free from the influence of the electric field of the trap.

The whole system is set up tightly on the top of the wooden

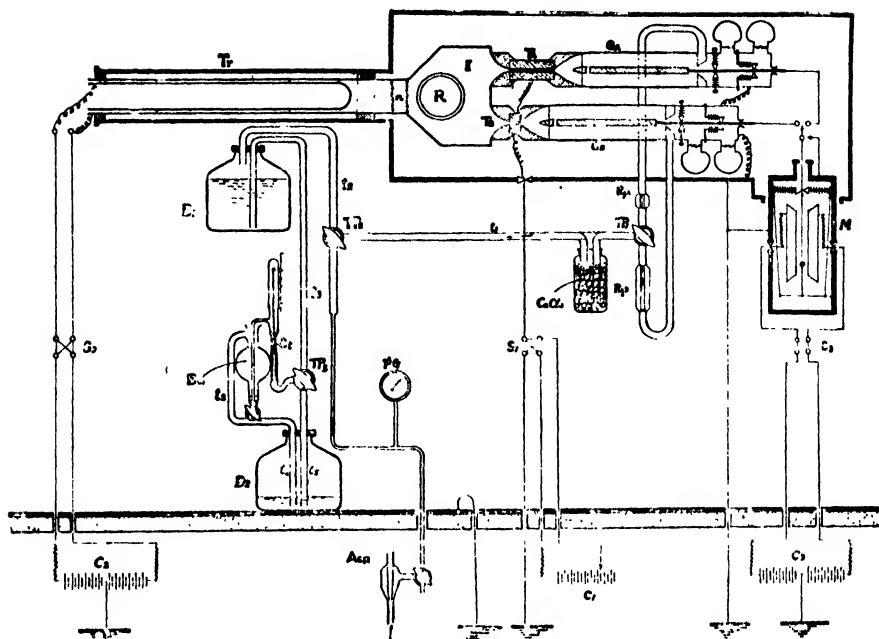
each other, so that the gas may not be affected by any external electric field. An entrance "G" and an outlet "A" of the tubing system are made into the form of stream-line to avoid eddy disturbances in the flow of gas. A front condenser "C" is added for protecting the capillary system from the effect of the electric field of Gerdin-system.

On the construction of the Gerdin-tube, the support of the inner electrode "EE" and leading "MM" was modified to be connected in an axial line straightly and rigidly, and was made enough strong against the external mechanical shocks. The leading "MM" coated with special insulation-laquer was supported by an ebonite plug "Q" and pins "P." The "Q" is screwed into the brass block "J," and the leading rod was passing along the inside of the plug through the centre of an ambroid button "S." The grooved ebonite pin with a small piece of an ambroid cap is fixed on the brass screw which set into the brass cylinder "BB." The centering of the inner electrode can be exactly adjusted by adjusting these three screws. Brass cover "BK" is insulated from "AA" by a piece of mica and connected to earth. "DD" is the dryer which contains metallic natorium, and protects the high insulation from the effect of moisture. The plug "Q" is also covered by a short tube "K" to avoid the influence of dust, water vapour and external electric disturbances. "R" was a drum fitted exactly into the outer tube "BB," which has eight holes at the side of Gerdin-tube and aparts with a clearance $\frac{1}{2}$ mm. from the inner electrode; the purpose of this drum is to let the flow of air be laminar and to keep the leading "MM" free from the running air which enters from the eight holes into "R" and run out from the tube "G." " R_{gA} " and " R_{gB} " are capillary-sets which are just same with " T_A " and " T_B ," and are used as register-tubes.

If the voltage of the outer electrode is 100 volts, and the volume-rate of the air flow is 8.5 c.c./sec., then the limiting mobility "W" of ions caught by the condenser is

$$W = 4.7 \times 10^{-3} \text{ cm./sec ; volt/cm.}$$

Fig. 2.



In Fig. 2, "I" is an ionization chamber, inside of which an ionium ionizer "R" is set. In order to prevent the effect of contamination of the apparatus by volatilisation of the ionium this ionizer is covered with a thin film of collodion.

Ions and dusts contained in aspirated air are filtered electrically by the ion trap "T_r" which consists of two co-axial brass cylinders with the clearance of about $\frac{1}{2}$ mm. apart, and about 50 cm. in length. Thus the air flows in this annular space and passes through the electric field of about 4000 volt/cm. in the trap. Now let the velocity of the air-flow between the annular space be 2.5 cm./sec., then the limiting mobility of ions in the trap is 2.3×10^{-5} cm./sec.: volt/cm.: therefore nearly all of the ions may be trapped off. Two sheets of fine nets "n" soldered parallel to each other at a distance 5 mm. apart, are put across the entrance of the ionization-chamber to let it keep free from the influence of the electric field of the trap.

The whole system is set up tightly on the top of the wooden

V-shaped support with insertions of rubber plate for prevention from external shocks and is electrically screened by tin-box.

The measurement of ionic currents is done by the sensitive stable electrometer originated by Prof. K. SHIRATORI⁽⁶⁾ in a sensibility of 550 to 1200 divisions per volt.

The circulation device of air is as shown in Fig. 2. It consists of two bottles " B_1 ", and " B_2 ", which capacity is 5000 c.c. and the height between them is 2.5 meters. The connection is by glass tubes using three-way-taps. The oil-flow from " B_1 " to " B_2 " produces air current which may be changed into any side of both diffusion-systems of the longer or shorter capillary, " A " or " B ", by the tap " $T_{1,1}$ ". " A_{air} " is the aspiration system, by which the oil accumulated in the bottle " B_2 " may be able to return back into the bottle " B_1 ". The capillary " Ct " is provided with a copper rope and by adjusting its length in the capillary we can able to control the rate of the circulation. The velocity of oil-flow or air circulation is measured by reading the time-duration for filling the measurer " B_M " of 107.5 cc. in volume. The circulation-oil is the mixture of a machine oil and petroleum, which is prepared to have character of small evaporation loss and small variation of viscosity due to the change of temperature and humidity.

But on account of the change of level-head in oil-bottles the rate of flow may be differed between the beginning and the end of one measurement, so that, considering the error due to this level-change and viscosity-change for temperature we make a scale on the receiver-bottle " B_2 " to measure the velocity of oil-flow for a certain level and temperature. The capillary-registers " $R_{\mu A}$ " and " $R_{\mu B}$ ", corresponding to the capillary system " T_A " and " T_B " respectively, are arranged to make the resistance of the air flow of both diffusion-systems exactly same.

The whole system excluding batteries, is set in the thermo-hygro-regulating room which wall is shielded by copper Plates from the external electric disturbances. The constancy of temperature and

humidity is kept in the degree of exactness within a limit of $\pm 1/4^\circ\text{C}$ in temperature and $\pm 1/2\%$ in humidity.

For the observation all the processes are handled on the cantilever bridge from the next room to avoid carefully the mechanical shocks.

(3) The Experiments

When the temperature and humidity in the room become to a certain desired value, the trap is switched on a potential of 100 volts, and the air circulation is begun to blow some stagnant ions in the diffusion apparatus out; then after two minutes the electrometer connected to the inner electrode of Gerdin-system is tested for the insulation under the working conditions, and is adjusted to a certain sensibility desired.

Next when the ionizer is fit in place and the diffusion system " T_A " is raised to +100 volts, the reading of the electrometer is taken, and then changed the diffusion system into the side of the " T_B ". Thus the observations in both long and short diffusion-systems for both positive and negative potential are alternately carried out; and these four observations are repeated several times; then we can find the times of durations " t_A " and " t_B " for the deflections of exactly 10 divisions in electrometer for both long and short diffusion systems are obtained at the given condition of temperature and humidity; so that we have $\frac{t_B}{t_A} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = y$, and by finding the value of x corresponding to this y the diffusion coefficient $D \pm$ may be easily found.

When the flow of air in the capillary system is perfectly laminar the velocity " V " of the flow at a distance " r " from the centre is given by the equation $W = (2V/a^2)(a^2 - r^2)$, where " W " is the rate of flow, and " a " is the radius of the tubing, $\pi a^2 Vt$ = total volume of the gas passed at any cross section in a time " t ". According to RAYNOLDS,⁽⁷⁾ the velocity of upper limit (V_g) for laminar flow must be satisfy the condition $V_g \rho a / \mu < 700$, where " μ " is the coefficient of viscosity and " ρ " the density of air. Assume $\mu = 0.000191$ (18°C),

$\rho=0.001293$ and $V=567$ cm./sec. (corresponding $Q=8.5$ cc./sec.), then $V\rho a/\mu=100$, so that this value is surely within the above laminar condition. In this experiment special cares are paid for removing the sources of errors as possible.

(4) Results

The results of the observations of the diffusion coefficients of ions of both signs are shown in Table II and III respectively. The error in the individual determinations is remained within two per cent.

The Graph 1 and 2 are the results plotted against the temperature and vapour-tension. It is clearly seen that the coefficients of diffusion of positive and negative ions in air show a characteristic change due to the variation of temperature and humidity and that there are a striking contrast between the positive and negative ions.

For the diffusion coefficients of positive ions, as shown in Graph I, two small portions of larger coefficient than 0.04 are extended around the points of (0°C, 4.5 mm.) and (6°C, 7.5 mm.) respectively, from which contour-lines of lower coefficients run down toward the side of higher temperature. At about 10°C the minimum zone less than 0.025 exists inclining very slightly to the higher temperature and higher vapour-tension. From this minimum the coefficient increases gradually with temperature in the side of the low tension, but decreases in the side of the higher tension than 23 mm.

It is clear that the coefficients of positive ions are varied in a wave form according to the variation of temperature and vapour tension. Thus if we consider the conditions of a certain constant temperature, then the coefficients show some-like a periodic variation due to changes of vapour-tension. In the region from 15°C to 40°C for temperature and from 8 mm. to 20 mm. for vapour-tension the coefficients remain nearly constant and show no more than only small oscillational variation with change of temperature and vapour-tension.

TABLE II.
The Diffusion Coefficients of Positive Ions.

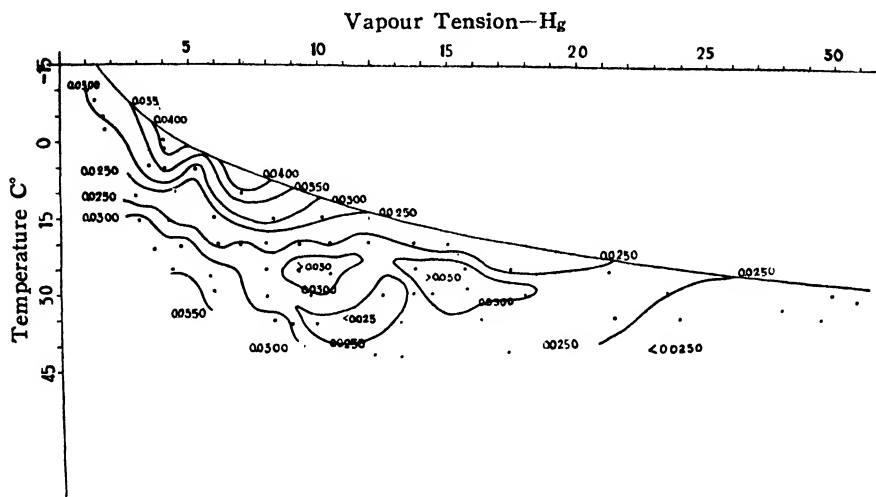
No. of Observ.	T °C	V. T. mm.	D+	No. of Observ.	T °C	V. T. mm.	D+
I (2)	-14.2	0.98	0.0316	K (1)	25.0	8.00	0.0271
II (1)	-10.0	1.06	0.0273	(2)	25.0	13.80	0.0335
(2)	- 8.3	1.38	0.0305	(3)	25.0	15.71	0.0339
III (1)	- 5.0	1.69	0.0320	(4)	25.2	17.50	0.0220
(2)	- 2.4	1.78	0.0272	(5)	25.3	9.29	0.0327
(3)	- 0.4	4.00	0.0406	(6)	25.7	10.41	0.0320
IV (1)	1.3	4.00	0.0410	(7)	25.7	21.32	0.0265
(2)	4.7	3.48	0.0329	(8)	26.1	5.82	0.0333
V (1)	5.0	4.09	0.0362	(9)	27.5	18.31	0.0295
(2)	5.3	5.28	0.0271	(10)	29.1	6.00	0.0330
(3)	8.5	6.70	0.0408	(11)	29.1	15.80	0.0334
(4)	9.7	6.49	0.0355	X (1)	30.0	9.75	0.0290
(5)	9.8	4.43	0.0239	(2)	30.0	13.00	0.0225
VI (1)	10.2	7.01	0.0376	(3)	30.0	13.75	0.0277
(2)	10.3	2.95	0.0237	(4)	30.0	14.71	0.0327
(3)	14.9	5.95	0.0225	(5)	30.1	8.03	0.0263
(4)	14.9	10.13	0.0257	(6)	30.2	23.53	0.0253
VII (1)	15.0	8.29	0.0330	(7)	30.5	18.12	0.0310
(2)	15.2	3.05	0.0313	(8)	31.1	29.90	0.0239
(3)	15.2	4.21	0.0250	(9)	32.5	30.95	0.0274
(4)	19.9	6.15	0.0239	XI (1)	35.0	8.36	0.0310
(5)	19.9	7.95	0.0241	(2)	35.0	16.36	0.0281
(6)	19.9	10.45	0.0243	(3)	35.0	21.55	0.0260
(7)	19.9	11.95	0.0270	(4)	35.3	24.04	0.0248
VIII (1)	20.0	7.00	0.0254	(5)	35.5	13.25	0.0268
(2)	20.0	9.30	0.0272	(6)	35.9	9.96	0.0232
(3)	20.0	13.75	0.0247	(7)	35.9	29.54	0.0210
(4)	20.2	15.05	0.0232	(8)	37.5	9.08	0.0300
(5)	20.3	4.70	0.0331	XII (1)	41.7	12.20	0.0280
(6)	20.8	3.70	0.0327	(2)	42.0	13.22	0.0290
(7)	24.6	4.40	0.0340				

TABLE III.
The Diffusion Coefficients of Negative Ions.

No. of Observ.	T °C	V. T. mm.	D—	No. of Observ.	T °C	V. T. mm.	D—
I (1)	-10.0	1.08	0.0424	VI (7)	20.7	4.80	0.0438
(2)	- 8.5	1.39	0.0382	(8)	24.8	15.89	0.0463
II (1)	- 5.0	1.69	0.0360	IX (1)	25.0	11.19	0.0438
(2)	- 2.3	1.71	0.0360	(2)	25.0	13.88	0.0453
(3)	- 1.2	3.06	0.0251	(3)	25.0	19.75	0.0325
IV (1)	0.0	2.28	0.0386	(4)	25.6	21.38	0.0469
(2)	1.2	4.02	0.0225	(5)	26.2	5.75	0.0429
(3)	4.5	3.29	0.0312	(6)	27.5	18.50	0.0467
V (1)	5.0	5.10	0.0185	(7)	29.3	5.15	0.0429
(2)	9.3	7.64	0.0172	(8)	29.5	23.94	0.0686
VI (1)	10.0	3.30	0.0446	(9)	29.8	15.79	0.0486
(2)	10.0	4.63	0.0241	X (1)	30.0	13.38	0.0462
(3)	10.6	6.00	0.0217	(2)	30.2	8.04	0.0443
(4)	14.9	8.65	0.0226	(3)	30.2	22.15	0.0481
VII (1)	15.0	2.55	0.0503	(4)	30.4	9.68	0.0444
(2)	15.0	6.02	0.0257	(5)	30.6	18.12	0.0466
(3)	15.0	10.62	0.0330	(6)	30.6	25.63	0.0456
(4)	15.3	4.11	0.0300	(7)	31.8	30.85	0.0404
(5)	19.7	7.93	0.0327	(8)	34.5	21.75	0.0730
(6)	19.8	5.95	0.0289	XI (1)	35.0	17.13	0.0520
(7)	19.9	12.22	0.0350	(2)	35.1	8.19	0.0475
VIII (1)	20.0	7.13	0.0283	(3)	35.1	24.04	0.0778
(2)	20.0	10.50	0.0341	(4)	36.0	10.19	0.0489
(3)	20.0	14.00	0.0322	(5)	36.4	13.05	0.0525
(4)	20.2	14.95	0.0334	(6)	37.4	9.96	0.0525
(5)	20.6	3.65	0.0448	XII (2)	41.9	11.22	0.0657
(6)	20.6	9.38	0.0370				

Therefore, we may find such very regular variation in positive-ions as that, on one hand the coefficient somehow increases and also

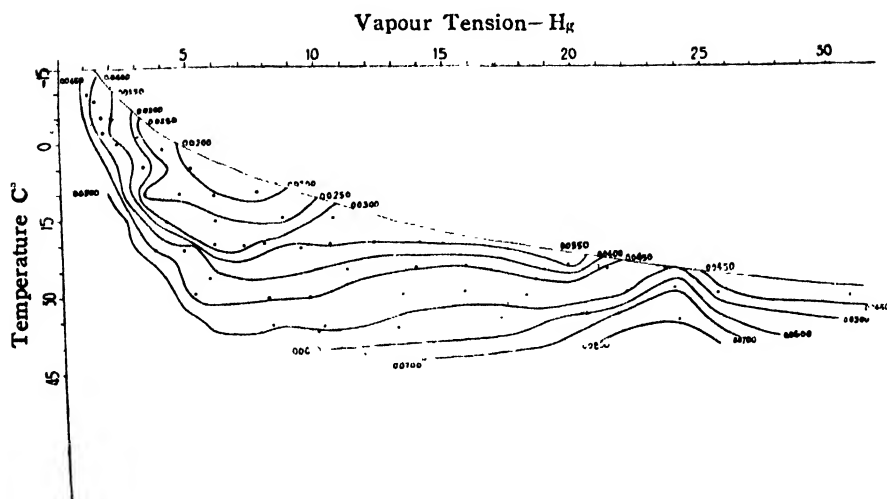
somehow decreases with temperature-changes, showing an undulative motion ; while, on the other hand, the coefficient gradually decreases with increase of vapour-tension.

Graph 1. DIFF. COFF D_+ 

The diffusion coefficients of the negative ions are distributed as shown in Graph 2 which is characterised by contour-lines in forms of concentric arcs suspended on the chord of the saturation-line, the centre of these arcs is the portion of the minimum, less than $D_- = 0.020$ at the temperature 5°C and vapour-tension 7 mm.

The coefficient regularly increases from this centreportion according to both increases and decreases in temperature and vapour-tension ; but it must be noted that in the part of lower temperature and vapour-tension than the portion of the minimum coefficients the variation of vapour-tension affects much more sensible for the diffusion-coefficient than the change of temperature, and that in the part of higher value in temperature and vapour-tension than the portion of the minimum coefficient the variation of temperature has much more influence than the variation of vapour-tension ; therefore in the lower temperature the coefficient is not so much influenced by temperature-change though it becomes vigorously larger with a small decrease of vapour-tension ; but contrarily in the higher temperature

Graph 2. DIFF. COFF. D-

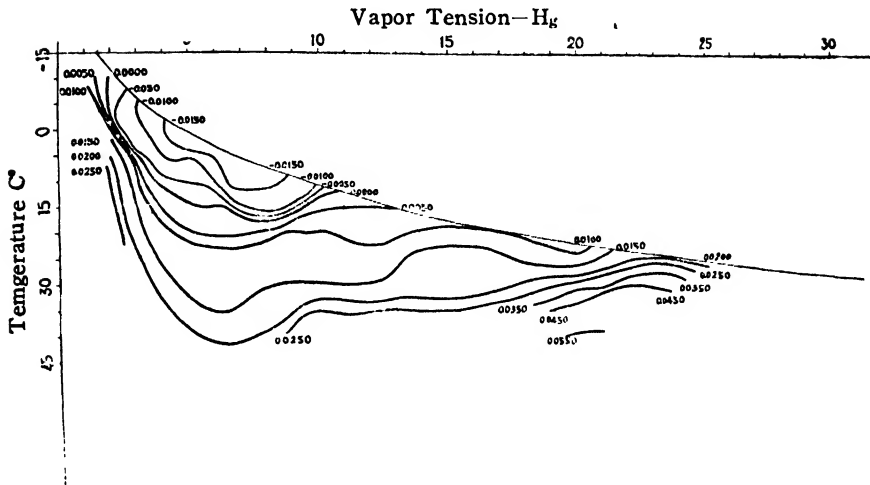


the coefficient is much affected with change of temperature while it is not greatly influenced with increase of vapour-tension. The contour-line tends to be parallel with temperature-co-ordinate in the lower temperature and with vapour-tension in the higher temperature. These characteristic points in negative ions show a striking difference with positive ions.

The irregular periodic oscillation of the coefficients with vapour-tension denoted by J. J. NOLAN⁵, may be interpreted from these characteristic effect of temperature and vapour-tension for the coefficients of ions of both signs.

The distribution of the difference between these diffusion coefficients of both positive and negative ions is graphically represented in the Graph 3.

The contour-lines of such differences have the tendency of becoming parallel with temperature-co-ordinate in the part of lower temperature and parallel with the co-ordinate of vapour-tension in the part of higher temperature. In the small part around the portion at 5°C of temperature and 6 mm. of vapour-tension the difference is negative, and the diffusion of the positive is larger than the negative; in the other part the difference is always positive. At the part of

Graph 3. DIFF. BETW. POS. D₊ & NEG. D₋

low vapour-tension and also at the part of higher temperature the difference is comparatively larger. The distribution of these contour-lines are very regularly distributed in order by order. This fact must be important for the consideration of the influence of temperature and vapour-tension, and these experimental results in the moist air are very interesting. The coefficients of negative ions tend to increase with increase of temperature scale, and also the coefficients of positive ions show the same tendency with exception in the region of the low temperature and high vapour-pressure, as clearly seen in Graph 1.

In spite of the fact that the coefficients of negative ions are already admitted to be always greater than that of the positive ions, some certain region around the point of temperature 5°C and vapour-tension 6 mm. shows just opposite relationship, where the positive is larger than the negative, as clearly seen in Graph 3; according to the distance from this region the negative becomes gradually larger than the positive.

But, the diffusion coefficient of positive ions is seemed to be comparatively stable against the variation of thermo-hygrometric condition; it varies from 0.020 to 0.040 due to the variation from $(-15^{\circ}\text{C}, 1 \text{ mm.})$ to $(45^{\circ}\text{C}, 31 \text{ mm.})$; while, the coefficient of negative ions is

very changeable for the variation of temperature and humidity as such vast region from 0.020 to 0.080 during the same change of the condition.

If this result is considered in connection with the experiments of ionic mobility by TYNDALL and GRINDLEY,⁽⁹⁾ ERIKSON,⁽¹⁰⁾ GRIFFITHS and AUBERY⁽¹¹⁾ and ZELENY,⁽¹²⁾ we may find remarkable points of agreement like that the negative mobility gradually decreases as the water-vapour increases, and that TYNDALL, STAAR and POWELL⁽¹³⁾ showed no effect of water-vapour on the mobility of the positive ion while ZELENY found a slight increase in mobility due to it.

(5) Conclusion

The systematic measurements of the diffusion-coefficients of ions in air over the range of temperature from -15°C to $+45^{\circ}\text{C}$ and of vapour-tension from 1 mm. to 32 mm. were resulted as follows:—

i) The coefficients of both ions are very regularly affected by changes of temperature and vapour-tension.

ii) In the part from -10°C to 15°C in temperature and from 2 mm. to 11 mm. in vapour-tension, the coefficients of positive ions are larger than those of the negative ions and in all the other part the coefficients of the negative ions are larger than the positive.

iii) The difference between the both coefficients of these negative and positive ions increases with the increase of temperature; and in the part higher than 7 mm. of vapour-tension the influence of temperature is much larger than that of vapour-tension, the lines of iso-difference tend to become nearly parallel with the axis of vapour-tension, and in the part lower than 7 mm. the influence of the vapour-tension is exceedingly larger, the lines of iso-difference become almost parallel with the temperature-axis.

iv) The coefficient of the negative ions increases with decrease of vapour-tension in the part of lower vapour-tension and also with increase of temperature in the part of higher vapour-tension.

v) The coefficients of the positive ions do not vary in so much

wide ranges like that of the negative, but their changes are somelike oscillational and the minimum parts of the oscillational wave are at the zone from 10°C to 15°C of temperature and at the part of very higher vapour-tension.

These results can be applied to the mechanism of the electrical polarization of the atmosphere, and also the explanation of the polarity of lightning and the growth of thunder clouds just as like as many researchers have discussed⁽¹⁴⁾ the nature of thunders.

In conclusion, I wish to express my hearty thanks to Prof. Dr. K. SHIRATORI, the director of the institute, for his kind guidances throughout this work, and also to Dr. J. OKUBO, the professor of Tohoku Imperial University, for supplying capillary tubes and for his continued interest in the work. I have further to thank Mr. S. TATARA for his advice and assistance during the experiment.

(1936. 1, 26)

(The Institute of Meteorology and Geophysics,
Taihoku Imperial University.)

References

- 1) J. S. TOWNSEND: Phil. Trans. A, Vol. 193, p.129 (1899)
 - 2) J. S. TOWNSEND: Phil. Trans. A, Vol. 195, p. 259 (1900)
 - 3) FRANCK and WESTPHAL: Verh. D. Phys. Ges., Vol. 11, pp. 146, 276 (1909)
 - 4) SALLES: Ann. Physique, Vol. 2, p. 273 (1914)
 - 5) J. J. NOLAN: Roy. Soc. Proc., A, Vol. 127, p. 155 (1930)
 - 6) K. SHIRATORI: Memoir Taihoku Imp. Univ., Vol. XV, No. 1 (1935)
 - 7) H. LAMB: Hydro dynamics. 5ed.
 - 8) V. LANG: Theor. Phys. 11 Aufl. 1891, s. 978 ff.
 - 9) A. M. TYNDALL and GRINDLEY: Roy. Soc. Proc., A, Vol. 110. p. 342 (1926)
 - 10) H. A. ERIKSON: Phys. Rev., Vol. 30, p. 791 (1928)
 - 11) E. GRIFFITHS and J. H. AWBERY: Proc. Phys. Soc., Vol. 41, p. 240 (1929)
 - 12) J. ZELENY: Phys. Rev., Vol. 34, p. 310 (1929)
 - 13) A. T. STAAR and POWELL: Roy. Soc. Proc., A, Vol. 121, p. 172 (1928)
 - 14) A. NIPPOLT USW.: Geophys. Bd. II, s. 358.
-

BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XVIII)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, February 9, 1937.)

Im folgenden mögen wir einige Sätze über Kreise und Kugeln beweisen.

(1)

1. Nun untersuchen wir Kreise in R_2 .

\mathfrak{z} , \mathfrak{w} seien zwei Kreise, die durch die Schnittpunkte der Kreise \mathfrak{x} und \mathfrak{y} gehen, so folgt

$$\sin \widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{z}} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y}, \lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y})} - \{\lambda(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + \mu(\mathfrak{x}\mathfrak{y})\}^2}{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})} \sqrt{(\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y}, \lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y})}}$$

$$= \frac{\mu \sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})} - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2}{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})} \sqrt{\lambda^2(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + 2\lambda\mu(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + \mu^2(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}},$$

$$\sin \widehat{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} = -\frac{\lambda \sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})} - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2}{\sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})} \sqrt{\lambda^2(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + 2\lambda\mu(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + \mu^2(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}},$$

$$\therefore \sin \widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{z}} : \sin \widehat{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} = \frac{\mu}{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} : \frac{\lambda}{\sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}},$$

$$\sin \widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{w}} : \sin \widehat{\mathfrak{y}\mathfrak{w}} = \frac{\mu'}{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} : \frac{\lambda'}{\sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}},$$

wo λ , μ , λ' , μ' Parameter sind.

Setzen wir $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{w}) = \sin \widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{z}} / \sin \widehat{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} : \sin \widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{w}} / \sin \widehat{\mathfrak{y}\mathfrak{w}}$,

so entsteht

$$(1) \quad \frac{\lambda'}{\mu'} + \frac{\lambda}{\mu} = 0,$$

wenn

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{w}) = -1.$$

Für den Kreis $\bar{\mathfrak{w}}$ besteht

$$(2) \quad \frac{\bar{\lambda}}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} = 0,$$

wo $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ Parameter, die zu $\bar{\mathfrak{w}}$ gehören, sind.

Aus (1), (2) folgt

$$\frac{\bar{\lambda}}{\mu} = \frac{\lambda'}{\mu'}.$$

Sind 3 Punkte, so kommt vor

$$(\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y})^2 = 0,$$

$$\text{d. h. } (3) \quad \lambda(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + 2\lambda\mu(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) + \mu^2(\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = 0.$$

Aus (3) kann man zwei Werte von $\frac{\lambda}{\mu}$ finden, z. B. $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$.

Wenn für $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ und $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$ (1) besteht, so entsteht

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} = -\frac{2(\mathfrak{x}\mathfrak{y})}{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})} = 0,$$

d. h. \mathfrak{x} und \mathfrak{y} müssen zueinander senkrecht sein.

So folgt der

Satz: Ist

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2) = -1,$$

so müssen \mathfrak{x} und \mathfrak{y} zueinander senkrecht sein, wo \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 Null-Kreiskomplex des linearen Komplexes $(\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y})$ sind. $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2)$ bedeutet das Doppelverhältniss zwischen \mathfrak{x} , \mathfrak{y} , \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 .

2. Wir betrachten nun

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}, \\ \bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{x} - i\mathfrak{y}, \end{cases} \quad (i = \sqrt{-1})$$

wo \mathfrak{x} , \mathfrak{y} Kreise in R_2 sind, so ergibt sich

$$(\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{x}}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + (\mathfrak{y}\mathfrak{y}) = 2,$$

$$(\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) - (\mathfrak{y}\mathfrak{y}) + 2i(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0, \quad (\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}) = 0, \quad \text{wo } (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0.$$

\mathfrak{z} , $\overline{\mathfrak{z}}$ bezeichnen also zwei Punkte, deren Länge $\sqrt{2}$ gleich ist, wenn \mathfrak{x} und \mathfrak{y} zueinander senkrecht sind.

3. Im folgenden mögen wir Kreisgeometrie in R_2 untersuchen.

Nehmen wir

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{z}, \\ \mathfrak{x}' = \lambda'\mathfrak{y}' + \mu'\mathfrak{z}', \end{cases}$$

so kommt zustande

$$(2) \quad \cos \theta = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{x}')}{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})} \sqrt{(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}')}} \\ = \frac{\lambda\lambda'(\mathfrak{y}\mathfrak{y}') + \lambda\mu'(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) + \lambda'\mu(\mathfrak{y}'\mathfrak{z}) + \mu\mu'(\mathfrak{z}\mathfrak{z})}{\sqrt{\lambda^2(\mathfrak{y}\mathfrak{y}) + 2\lambda\mu(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) + \mu^2(\mathfrak{z}\mathfrak{z})} \sqrt{\lambda'^2(\mathfrak{y}'\mathfrak{y}') + 2\lambda'\mu'(\mathfrak{y}'\mathfrak{z}) + \mu'^2(\mathfrak{z}\mathfrak{z})}},$$

wo \mathfrak{y} , \mathfrak{z} , \mathfrak{y}' , \mathfrak{z}' , \mathfrak{x} und \mathfrak{x}' Kreise, θ Winkel zwischen \mathfrak{x} und \mathfrak{x}' , λ , μ , λ' , μ' Parameter sind.

Wenn \mathfrak{x} und \mathfrak{z} bzw. \mathfrak{x}' und \mathfrak{z} zueinander senkrecht sind, so folgt

$$(3) \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{z}) = (\mathfrak{x}'\mathfrak{z}) = 0.$$

Aus (1), (3) ergibt sich

$$(4) \quad \begin{cases} 0 = \lambda(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) + \mu(\mathfrak{z}\mathfrak{z}), \\ 0 = \lambda'(\mathfrak{y}'\mathfrak{z}) + \mu'(\mathfrak{z}\mathfrak{z}). \end{cases}$$

Aus (2), (4) kommt vor

$$(5) \quad \cos \theta = \frac{\frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{z})^2(\mathfrak{y}\mathfrak{y}')}{(\mathfrak{y}\mathfrak{z})(\mathfrak{y}'\mathfrak{z})} - \frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{z})}{(\mathfrak{y}\mathfrak{z})}(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) - \frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{z})}{(\mathfrak{y}'\mathfrak{z})}(\mathfrak{y}'\mathfrak{z}) + (\mathfrak{z}\mathfrak{z})}{\sqrt{\frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{z})^2}{(\mathfrak{y}\mathfrak{z})^2}(\mathfrak{y}\mathfrak{y}) - 2\frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{z})}{(\mathfrak{y}\mathfrak{z})}(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) + (\mathfrak{z}\mathfrak{z})} \sqrt{\frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{z})^2}{(\mathfrak{y}'\mathfrak{z})^2}(\mathfrak{y}'\mathfrak{y}') - 2\frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{z})}{(\mathfrak{y}'\mathfrak{z})}(\mathfrak{y}'\mathfrak{z}) + (\mathfrak{z}\mathfrak{z})}} \\ = \frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{z})(\mathfrak{y}\mathfrak{y}') - (\mathfrak{y}\mathfrak{z})(\mathfrak{y}'\mathfrak{z})}{\sqrt{(\mathfrak{z}\mathfrak{z})(\mathfrak{y}\mathfrak{y}) - (\mathfrak{y}\mathfrak{z})^2} \sqrt{(\mathfrak{z}\mathfrak{z})(\mathfrak{y}'\mathfrak{y}') - (\mathfrak{y}'\mathfrak{z})^2}}.$$

Also folgt $\theta = \pi / 2$, wenn $(\eta\eta') = 0$, $(\eta'\zeta) = 0$ ist.

4. Es seien zwei Kreise η , ζ im R_2 gegeben. Ist ξ ein Kreis, der durch die Schnittpunkte von η und ζ geht, so entsteht

$$(1) \quad \xi = \lambda\eta + \mu\zeta,$$

wo λ , μ zwei Parameter sind.

Aus (1) bekommt man

$$(2) \quad (\xi\eta) = \text{const. } \lambda + \mu(\eta\zeta),$$

$$(3) \quad (\xi\zeta) = \lambda(\eta\zeta) + \text{const. } \mu.$$

Aus (1), (2) und (3) ergibt sich

$$(4) \quad \text{const. } \xi [\text{const.} - (\eta\zeta)^2] + \eta [(\eta\zeta)(\xi\zeta) - \text{const.}(\xi\eta)] \\ + \zeta [(\xi\eta)(\eta\zeta) - \text{const.}(\xi\zeta)] = 0,$$

$$\text{d. h. } (5) \quad \text{const. } \xi [\text{const.} - \cos^2 \phi] + \eta [\cos \phi \cdot \cos \varphi - \text{const.} \cos \psi] \\ + \zeta [\cos \psi \cos \phi - \text{const.} \cos \varphi] = 0,$$

wo $\phi = \widehat{\eta\zeta}$, $\varphi = \widehat{\xi\zeta}$, $\psi = \widehat{\xi\eta}$ sind.

Satz: In unserem Kreisbüschel besteht (5).

Nehmen wir

$$\eta = \lambda\xi + \mu\dot{\xi}$$

anstatt (1), so folgt

$$(\eta\xi) = \lambda(\xi\xi), \quad (\eta\dot{\xi}) = \mu(\dot{\xi}\dot{\xi}),$$

woraus sich ergibt

$$\eta = \frac{(\eta\xi)}{(\xi\xi)} \xi + \frac{(\eta\dot{\xi})}{(\dot{\xi}\dot{\xi})} \dot{\xi}$$

$$\text{d. h. } \eta = \cos \phi \cdot \xi + \frac{(\eta\dot{\xi})}{(\dot{\xi}\dot{\xi})} \dot{\xi},$$

wo $\xi = \xi(t)$ ist.

5. Wir betrachten nun eine Kugel $\xi(t)$ und eine Nachbarkugel $\xi + \dot{\xi} dt$.

$$\eta = \lambda' \xi + \mu' (\xi + \dot{\xi} dt),$$

$$\text{d. h.} \quad (1) \quad \eta = \lambda \xi + \mu \frac{d\xi}{dt}$$

bezeichnet eine Kugel, die durch die Schnittpunkte von ξ und $\xi + \dot{\xi} dt$ geht, wo λ' , μ' , λ , μ Parameter sind.

Wenn ξ senkrecht zu η ist, so entsteht

$$(\eta \xi) = \text{const. } \lambda + \mu \left(\xi \frac{d\xi}{dt} \right) = 0,$$

wo $(\xi \dot{\xi}) = 0$. So folgt $\lambda = 0$, d. h.

$$(2) \quad \eta = \mu \frac{d\xi}{dt},$$

und so kommt zustande⁽¹⁾

$$(3) \quad 1 = (\eta \eta) = \mu^2 (\dot{\xi} \dot{\xi}) = \mu^2,$$

$$\text{d. h.} \quad (4) \quad 1 = \mu^2,$$

$$(5) \quad \mu = \pm 1,$$

wenn⁽¹⁾

$$(\dot{\xi} \dot{\xi}) = 1.$$

So haben wir zu Folge

$$(6) \quad \eta = \pm d\xi / dt.$$

Man bezeichnet $d\phi$ als den unendlich kleinen Winkel zwischen η und dem Nachbarkreis $\eta + \dot{\eta} dt$:

$$\tan^2 d\phi = d\phi^2,$$

wo

$$d\phi^2 = (\ddot{\xi} \ddot{\xi}) dt^2,$$

und t ein Parameter ist.

Nun sei

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV, S. 126.

$$\mathfrak{x}(t + dt) = \mathfrak{x}(t) + \dot{\mathfrak{x}}(t) dt + \frac{1}{2} \ddot{\mathfrak{x}}(t) dt^2 + \dots,$$

so folgt

$$\cos \widehat{\mathfrak{x}(t + dt) \mathfrak{y}} = (\mathfrak{x}(t + dt) \mathfrak{y}) = \pm (\dot{\mathfrak{x}} \dot{\mathfrak{y}}) dt \pm \frac{1}{2} (\ddot{\mathfrak{x}} \dot{\mathfrak{y}}) dt^2 + \dots,$$

weil

$$(\mathfrak{x} \mathfrak{y}) = 0.$$

Wenn die Kugel \mathfrak{z} den beiden Kugeln $\mathfrak{x} + \alpha \dot{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{y} + \beta \dot{\mathfrak{y}}$ gleich ist, so folgt

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \alpha \dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{y} + \beta \dot{\mathfrak{y}}$$

$$\text{d. h.} \quad \mathfrak{z} - \mathfrak{x} = \alpha \dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{y} - \mathfrak{x} + \beta \dot{\mathfrak{y}},$$

wo α, β zwei Parameter sind.

Also kommt zustande

$$\cos \mathfrak{z} - \widehat{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}} - \mathfrak{x} = \cos \alpha \widehat{\dot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}} - \mathfrak{x} = \cos \alpha \widehat{\dot{\mathfrak{x}}, \alpha \dot{\mathfrak{x}} - \beta \dot{\mathfrak{y}}}.$$

Wenn $\alpha = \beta = 1$,

$$\text{so} \quad \cos \mathfrak{z} - \widehat{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}} - \mathfrak{x} = \cos \widehat{\dot{\mathfrak{x}}, \dot{\mathfrak{x}} - \dot{\mathfrak{y}}}.$$

6. Wenn

$$\cos^2 \widehat{\mathfrak{y} \mathfrak{x}} = \cos^2 \widehat{\mathfrak{z} \mathfrak{x}}$$

besteht, so bekommt man

$$\frac{(\mathfrak{y} \mathfrak{x})^2}{(\mathfrak{y} \mathfrak{y})} = \frac{(\mathfrak{z} \mathfrak{x})^2}{(\mathfrak{z} \mathfrak{z})},$$

$$\text{d. h.} \quad (1) \quad \frac{(\mathfrak{y} \mathfrak{x})}{\sqrt{(\mathfrak{y} \mathfrak{y})}} \pm \frac{(\mathfrak{z} \mathfrak{x})}{\sqrt{(\mathfrak{z} \mathfrak{z})}} = 0.$$

Gleichfalls ergeben sich aus

$$(2) \quad \cos^2 \widehat{\mathfrak{z} \mathfrak{x}} = \cos^2 \widehat{\mathfrak{x} \mathfrak{x}}, \quad \cos^2 \widehat{\mathfrak{x} \mathfrak{x}} = \cos^2 \widehat{\mathfrak{y} \mathfrak{x}}$$

beziehungsweise

$$(3) \quad \frac{(\mathfrak{z} \mathfrak{x})}{\sqrt{(\mathfrak{z} \mathfrak{z})}} \pm \frac{(\mathfrak{x} \mathfrak{x})}{\sqrt{(\mathfrak{z} \mathfrak{z})}} = 0$$

und

$$(4) \quad \frac{(xx)}{\sqrt{(xx)}} \pm \frac{(yy)}{\sqrt{(yy)}} = 0,$$

wo x, y, z drei gegebene Kreise in R_2 , x ein Kreis in R_2 ist.

Aus (1), (3), (4) kann man schlieszen, dasz *drei Kreise in sechs Kreisen* (1), (3), (4) *durch den Punkt in*

$$\frac{x}{\sqrt{(xx)}} \pm \frac{y}{\sqrt{(yy)}} \pm \frac{z}{\sqrt{(zz)}} \text{ gehen.}$$

7. x und y seien zwei Kreise in R_2 , so erhält man

$$(1) \quad \begin{cases} \cos \phi = \frac{(xy)}{\sqrt{(xx)} \sqrt{(yy)}} , \\ \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{(xx)} \sqrt{(yy)}} \sqrt{(xx)(yy) - (xy)^2} , \end{cases}$$

wo ϕ ein Winkel zwischen x und y ist.

Nun kommt zustande:

$$(2) \quad \exp. (2i\phi) = \frac{\cos \phi + i \sin \phi}{\cos \phi - i \sin \phi} = \frac{(xy) + \sqrt{(xx)^2 - (xy)^2}}{(xy) - \sqrt{(xx)^2 - (xy)^2}}$$

$$\therefore (3) \quad \phi = \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{(xy) + \sqrt{(xx)^2 - (xy)^2}}{(xy) - \sqrt{(xx)^2 - (xy)^2}} \right\}$$

$$\therefore (4) \quad \cos^2 \left[\frac{1}{2i} \log \frac{(xy) + \sqrt{(xx)^2 - (xy)^2}}{(xy) - \sqrt{(xx)^2 - (xy)^2}} \right] = \frac{(xy)^2}{(xx)(yy)}.$$

8. $x(u + \partial u, v + \partial v)$ seien zwei Kugeln in R_n . Es folgt

$$(1) \quad (x(u + \partial u, v + \partial v), \xi(u + du, v + dv)) = 0,$$

wenn $x(u + \partial u, v + \partial v)$ und $\xi(u + du, v + dv)$ zueinander senkrecht sind. Und wenn $x(u, v), \xi(u, v)$ zueinander senkrecht sind, so entsteht

$$(2) \quad (x(u, v), \xi(u, v)) = 0.$$

Nach TAYLORS Reichen folgt aus (1) und (2)

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial u} \right) du + \left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) dv + \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \xi \right) \delta u + \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \xi \right) \delta v \\
 & + \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u} \right) du \delta u + \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} \right) du \delta v + \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) \delta u \delta v \\
 & + \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) dv \delta v = 0.
 \end{aligned}$$

(3) bezeichnet zwei Richtungen in den Nachbarkugeln.

9. Im folgenden mögen wir die Kugelgeometrie im R_n prüfen. Ist φ der Winkel zwischen den Kugeln $\xi(t+dt)$ und η , so folgt

$$(1) \quad \cos \varphi = (\xi(t+dt), \eta).$$

Wenn besteht

$$(2) \quad \xi(t+dt) = \xi(t) + \xi'(t) dt + \frac{1}{2} \xi''(t) (dt)^2 + \dots,$$

so bekommt man

$$(3) \quad \cos \varphi = (\eta \xi) + (\eta \xi') dt + \frac{1}{2} (\eta \xi'') (dt)^2 + \dots$$

Ist $(\eta \xi) = 0$, $(\eta \xi') = 0$, so folgt

$$(4) \quad \begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2} (\eta \xi'') (dt)^2 + \dots, \\ \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{2 \cos \varphi}{(dt)^2} = (\eta \xi''). \end{cases}$$

Ist η eine Kugel, die geht durch die Schnittpunkte von

$$\xi, \xi + d\xi, \xi + d\xi + \frac{1}{2} d^2 \xi,$$

so ergibt sich

$$(5) \quad \eta = A\xi + B(\xi + d\xi) + C(\xi + d\xi + \frac{1}{2} d^2 \xi),$$

$$\text{i. e.} \quad (6) \quad \eta = \lambda \xi + \mu \xi' + \nu \xi'',$$

wo $A, B, C, \lambda, \mu, \nu$ skalare Grössen sind.

Aus (6) kommt vor

$$(7) \quad 0 = (\xi \eta) = \lambda (\xi \xi) + \mu (\xi \xi') + \nu (\xi \xi'') = \lambda - \nu,$$

$$(8) \quad 0 = (\xi' \eta) = \lambda (\xi' \xi) + \mu (\xi' \xi') + \nu (\xi' \xi'') = \mu,$$

daraus folgt

$$(9) \quad \delta = \lambda (\xi + \xi''),$$

$$\text{i. e.} \quad (10) \quad \delta = \frac{\xi + \xi'}{\sqrt{(\xi''\xi'') - 1}}$$

$$\therefore (11) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2 \cos \varphi}{(dt)^2} = (\xi''\delta) = \frac{(\xi\xi') + (\xi''\xi'')}{\sqrt{(\xi''\xi'') - 1}} = \frac{-1 + (\xi'\xi'')}{\sqrt{(\xi''\xi'') - 1}} \\ = \sqrt{(\xi''\xi'') - 1}$$

$$1 = (\delta\delta) = \lambda^2 \{(\xi\xi) + 2(\xi\xi'') + (\xi''\xi'')\} = \lambda^2 \{1 - 2 + (\xi''\xi'')\}$$

$$\therefore \quad \lambda^2 = \{(\xi''\xi'') - 1\}^{-1}.$$

(2)

1. Im folgenden möchte ich über meine Arbeit⁽¹⁾ Bemerkungen machen.

Wir haben die Gleichungen :

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

$$(2) \quad \sin^2 \varphi = (A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta.$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\exp. (2i\varphi) = (\cos \varphi + i \sin \varphi) : (\cos \varphi - i \sin \varphi) \\ = \{ \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} + i \sqrt{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta} \} \\ : \{ \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} - i \sqrt{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta} \}, \\ \therefore \varphi = \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{\sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} + i \sqrt{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta}}{\sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} - i \sqrt{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta}} \right\}.$$

2. Betrachten wir

$$\cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

wieder.⁽²⁾ Wenn A, B zwei Stellen von

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (V), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. V, S. 303.

(2) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII; Tohoku Math. Journ. Vol. 34, p. 196.

$$f(x, x) = T^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$$

und $C(x)$, $D(y)$ zwei neue Stellen von η darstellen, so werden A und B mit $(\lambda x + \mu y)$ gegeben. Es ergibt sich so

$$(1) \quad f(\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) = \lambda^2 f(x, x) + 2\lambda\mu f(x, y) + \mu^2 f(y, y) = 0,$$

wo λ, μ zwei Parameter sind.

Aus (1) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\mu_1} &= \frac{-f(x, y) - \sqrt{f(x, y) - f(x, x)f(y, y)}}{f(x, x)}, \\ \frac{\lambda_2}{\mu_2} &= \frac{-f(x, y) - \sqrt{f(x, y) - f(x, x)f(y, y)}}{f(x, x)}, \\ \therefore (2) \quad \frac{\lambda_2}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\mu_1} &= \frac{f(x, y) + \sqrt{f^2(x, y) - f(x, x)f(y, y)}}{f(x, y) - \sqrt{f^2(x, y) - f(x, x)f(y, y)}}. \end{aligned}$$

(2) ist das Doppelverhältnis von vier Lagen A, B, C, D von η .

3. Wir haben die Gleichung:

$$\cos^2 \varphi = \frac{T^{11} + 2T^{12}t + T^{22}t^2}{A^{11} + 2A^{12}t + A^{22}t^2}, \quad \text{wo } t = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ist. Betrachten wir

$$\frac{d}{dt}(\cos^2 \varphi) = 0,$$

so folgt

$$\begin{aligned} (T^{12} + T^{22}t)(A^{11} + 2A^{12}t + A^{22}t^2) \\ - (A^{12} + A^{22}t)(T^{11} + 2T^{12}t + T^{22}t^2) = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (A^{12}T^{22} - A^{22}T^{12})t^2 + (A^{11}T^{22} - A^{22}T^{11})t \\ + (A^{11}T^{12} - A^{12}T^{11}) = 0. \end{aligned}$$

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, kann man annehmen $A^{11} \neq 0$, sodass die Diskriminante gilt:

$$\begin{aligned}
 &= (A^{11}T^{23} - A^{23}T^{11}) - 4(A^{13}T^{23} - T^{13}A^{23})(A^{11}T^{13} - A^{13}T^{11}) \\
 &= 4A(A^{11})^{-2}(A^{11}T^{12} - A^{12}T^{11})^2 + [A^{11}T^{22} - A^{22}T^{11} \\
 &\quad - 2A^{22}(A^{11}T^{12} - A^{12}T^{11})(A^{11})^{-1}]^2 > 0,
 \end{aligned}$$

wenn der Winkel und der Parameter reell sind.

Deshalb gibt es *zwei verschiedene reelle Wurzeln* im allgemeinen.

4. Im folgenden mögen wir zwei Formeln zu meiner Arbeit⁽¹⁾ addieren.

Aus

$$\cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos^2 \varphi \, d\varphi &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \, d\varphi \\
 \therefore \left[-\frac{1}{2} \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{\varphi_0}^{\varphi} &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \, d\varphi
 \end{aligned}$$

$$\therefore (1) \quad \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{4}(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \, d\varphi.$$

Weiter

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varphi \, d\varphi &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} \, d\varphi \\
 (2) \quad \sin \varphi - \sin \varphi_0 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} \, d\varphi.
 \end{aligned}$$

(3)

Betrachten wir die Kreisscharen im R_2

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \varphi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2^n} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{2^n}} &= p^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2^n}} \xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2^n}} + q^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{2^n}} \chi^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{2^n}} \\
 &[\alpha_1, \dots, \alpha_{2^n}, \beta_1, \dots, \beta_{2^n} = \text{I, II}]
 \end{aligned}$$

wo $p^{\alpha_1 \dots \alpha_{2^n}}, q^{\beta_1 \dots \beta_{2^n}}$ die skalaren Grössen bedeuten.

Alle Kreise $\varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_{2^n} \beta_1 \dots \beta_{2^n}}$, die sich linear aus den $\xi^{\alpha_1 \dots \alpha_{2^n}}, \chi^{\beta_1 \dots \beta_{2^n}}$

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (V), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. V, p. 306.

kombinieren lassen, geben durch dieselben Schnittpunkte

$$\{\xi^{\alpha_2 \dots \alpha_n}, \eta^{\beta_1 \dots \beta_n}\}.$$

$$(2) \quad p^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} + q^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} \eta^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} = 0$$

ist die Bedingung dafür, dass die zwei Punktepaare

$$(3) \quad \{\xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} 1}, \xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} 1}\}, \{\xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} 11}, \xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} 11}\}$$

auf einem Kreis liegen, oder (2) ist die Bedingung dafür, dass zwei Punktepaare

$$(4) \quad \{\xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} 1}, \xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} 11}\}, \{\xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} 1}, \xi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} 11}\}$$

auf einem Kreis liegen, wobei

$$p^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, q^{\beta_1 \dots \beta_n}$$

irgendwelche skalare Zahlen sind.

Satz: Wenn die Punktepaare (3) auf einem Kreis liegen, dann liegen die Punktepaare (4) auch auf einem Kreis.⁽¹⁾

$$(4)$$

1. Zwischen $(\theta_i \theta_i)$, $(\theta_i \theta_\tau)$, $(\theta_\tau \theta_\tau)$, E, F, G besteht⁽²⁾

$$(1) \quad \lambda E = (\theta_i \theta_i), \lambda F = (\theta_i \theta_\tau), \lambda G = (\theta_\tau \theta_\tau) = 1,$$

so folgt

$$(2) \quad \lambda = \frac{(\theta_i \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2}{\rho (L dt^2 + 2M dt d\tau + N d\tau^2)},$$

wo ρ den Krümmungshalbmesser, E, F, G die Fundamentalgrößen erster Ordnung und L, M, N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung bedeuten.

Aus (2) kann man λ berechnen, d. h. E, F, G berechnen.

So kann man wissen, mit $(\theta_i \theta_i)$, $(\theta_i \theta_\tau)$, $(\theta_\tau \theta_\tau)$, L, M, N und ρ alle Formeln in der Elementarflächentheorie berechnen zu können.

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. 34, p. 195.

(2) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of Fac. of Sci. and Agr. Taihoku Imp. Univ., Vol. 2 (1929), p. 36.

2. Betrachten wir die Kreisfläche K, auf der D-Netze⁽¹⁾ liegen, so folgt

$$(1) \quad \frac{(\theta_t, \theta_t)}{1} = \frac{(\theta_t, \theta_\tau)}{p} = \frac{(\theta_\tau, \theta_\tau)}{p^2 + q^2},$$

wobei wir t, τ anstatt x, y nehmen.

Aus (1) folgt

$$(2) \quad p = (\theta_t, \theta_\tau) / (\theta_t, \theta_t), \quad q = \sqrt{(\theta_t, \theta_t)} - (\theta_t, \theta_\tau)^2 / (\theta_t, \theta_t)}.$$

Das Flächenelement $d\sigma$ der Oberfläche von K ist durch den Ausdruck:

$$(3) \quad d\sigma = \frac{\sqrt{(\theta_t, \theta_t)} - (\theta_t, \theta_\tau)^2}{(\theta_t, \theta_t)} dt d\tau$$

gegeben.

Als Kurven von Minimallinien auf K bezeichnet man

$$(4) \quad (\theta_t, \theta_\tau) \pm i \sqrt{(\theta_t, \theta_t)} - (\theta_t, \theta_\tau)^2 = \text{const.} (\theta_t, \theta_t), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Die Bedingung für ein Strahlennetz kann solcherweise formuliert werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(\theta_\tau, \theta_\tau) U - (\theta_t, \theta_\tau) V}{\sqrt{(\theta_t, \theta_t)} (\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_t, \theta_\tau)^2} \right\} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{(\theta_t, \theta_\tau) U - (\theta_t, \theta_t) V}{\sqrt{(\theta_t, \theta_t)} (\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_t, \theta_\tau)^2} \right\},$$

wo U und V zwei Ortsfunktionen auf der Kreisfläche K sind.⁽²⁾

3. Im folgenden mögen wir die Geometrie auf K untersuchen.

Es seien die Krümmungslinien parametrig und θ, θ' die von der Krümmungslinie $\tau = \text{const.}$ gemessenen Winkel konjugierter Richtungen. Dann haben wir

$$(1) \quad \tan \theta = \sqrt{\frac{(\theta_\tau, \theta_\tau)}{(\theta_t, \theta_t)}} \frac{d\tau}{dt}, \quad \tan \theta' = \sqrt{\frac{(\theta_\tau, \theta_\tau)}{(\theta_t, \theta_t)}} \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

$$(2) \quad \tan \theta \cdot \tan \theta' = - \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Der Winkel $\theta - \theta'$ zwischen den konjugierten Richtungen ist durch

$$(3) \quad \tan(\theta - \theta') = \frac{\rho_2 \cot \theta + \rho_1 \tan \theta}{\rho_2 - \rho_1}$$

(1) RADON, J.: Über konforme Geo. VI, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. V, S. 45.

(2) RADON, J.: Über konforme Geo. V, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV, S. 318.

gegeben, wo $1/\rho_1$ und $1/\rho_2$ Hauptkrümmungen sind.

Aus

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\rho_2 \cot \theta + \rho_1 \tan \theta}{\rho_2 - \rho_1} = 0$$

folgt

$$(4) \quad \tan \theta = \pm \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}},$$

sodass wegen (2) auch entsteht:

$$(5) \quad \tan \theta' = \mp \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}.$$

Aus (4), (5) erhalten wir

$$(6) \quad \begin{cases} \theta' = -\theta, \\ \tan(\theta' - \theta) = \pm \frac{2\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_2 - \rho_1}. \end{cases}$$

Aus der Bedingung⁽¹⁾

$$(7) \quad T_t = -T_\tau$$

folgt entweder

$$(8) \quad (\theta_t \theta_\tau) = 0,$$

oder⁽²⁾

$$(9) \quad L : (\theta_t \theta_t) = N : (\theta_\tau \theta_\tau).$$

Aus

$$(10) \quad T_t = T_\tau$$

kommt vor, dass $\frac{L}{(\theta_t \theta_t)}$, $\frac{M}{(\theta_t \theta_\tau)}$ und $\frac{N}{(\theta_\tau \theta_\tau)}$ eine arithmetische Progression bilden.

(1) HAYASI, T.: On the Usual Parametric Curve, Science Reports of the Tôhoku Imp. Univ. 5.

(2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XVII), Mem. of the Fac. of the Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ. Vol. XVIII, p. 160.

Aus

$$(11) \quad \rho_t : T_t = - \rho_\tau : T_\tau$$

folgt

$$(12) \quad M = 0$$

oder

$$(13) \quad (\theta_t \theta_t) : L = (\theta_\tau \theta_\tau) : N.$$

Aus

$$(14) \quad \rho_t : T_t = \rho_\tau : T_\tau$$

kommt vor, dass $\frac{(\theta_t \theta_t)}{L}$, $\frac{(\theta_t \theta_\tau)}{M}$ und $\frac{(\theta_\tau \theta_\tau)}{N}$ eine arithmetische Progression bilden.

4. Ist

$$\varphi(t, \tau) = \text{const.}$$

die Gleichung einer Kurvenschar einer Kreisfläche,⁽¹⁾ dann werden orthogonale Trajektorien bekanntlich dargestellt durch

$$(1) \quad \left\{ (\theta_t \theta_t) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} dt + \left\{ (\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} d\tau = 0.$$

Für die Katenoid gelten folgende Fundamentalgrößen

$$(2) \quad \frac{1}{\lambda} (\theta_t \theta_t) = \frac{t'^2}{t'^2 - a^2}, \quad \frac{1}{\lambda} (\theta_t \theta_\tau) = \theta, \quad \frac{1}{\lambda} (\theta_\tau \theta_\tau) = t''^2,$$

woraus sich ergibt

$$(3) \quad (\theta_t \theta_t) = \frac{1}{t'^2 - a^2}, \quad (\theta_t \theta_\tau) = 0.$$

Setzt man ferner

(1) MÖLLERS, B.: Über Normalensysteme, die mit der Rotations- und Schraubenfläche der Traktrix zusammenhängen, Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde, Münster i. W. (1905)

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = a \cdot (\theta_i \theta_i), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 1,$$

so erhalten wir

$$(5) \quad \tau = \frac{t''}{a} + c'_1,$$

wo a, c'_1 Konstanten sind.

5. Aus HILTONS Arbeit⁽¹⁾ kann man wissen, dass, wenn

$$(1) \quad (\theta_i \theta_i) \dot{t}^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) \dot{t} \dot{\tau} + (\theta_\tau \theta_\tau) \dot{\tau}^2 = 0$$

besteht, so \dot{k}_n konstant sein muss, wo (t, τ) den Punkt auf der DARBOUXschen Kurve und k_n die Krümmung in Normalschnitt bezeichnet.

$$(2) \quad (\theta_i \theta_i) b_1 \dot{t}^3 + 3(\theta_i \theta_i) b_2 \dot{t}^2 \dot{\tau} + 3(\theta_\tau \theta_\tau) a_1 \dot{t} \dot{\tau}^2 + (\theta_\tau \theta_\tau) \dot{\tau}^3 = 0$$

bezeichnet die drei Richtungen von DARBOUXkurven, deren Hauptnormal mit Normal zusammenfällt, wo a_1, b_1, b_2 in HILTONS Arbeit stehen.

6. Nach CHINIS Arbeit⁽²⁾ kann man wissen, dass die allgemeine Gleichung der geodätischen Linien aller Kreisflächen, für die

$$(1) \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1, (\theta_i \theta_\tau) = 0, (\theta_i \theta_i) = \frac{1}{\{t + f(\tau)\}^2}$$

gilt, dann die Form hat:

$$(2) \quad \frac{(\theta_i \theta_i) \sqrt{\sin \alpha}}{\sin \tau} - \int \frac{f(\tau) \sqrt{\sin \alpha}}{\sin \tau} d\tau = \text{const.},$$

wo

$$(3) \quad \sqrt{\sin \alpha} \cot \tau + \frac{1}{2} \int \sqrt{\sin \alpha} d\alpha = \text{const.}$$

besteht.

(1) HILTON, H.: On Darboux Lines, Proceedings of the London Math. Society II 29, S. 517.

(2) CHINI, M.: Sulla determinazione delle geodetiche di talune superficie, Rendiconti Istituto Lombardo (2) 59, 298-302.

ÜBER FLÄCHEN UND KURVEN (VII):

Zur relativen Differentialgeometrie

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, February 9, 1937.)

1. Nehmen wir

$$(1) \quad r(\phi) = \frac{\bar{h}(\phi)}{h(\phi)}$$

als R.-Abstand in R.-Geometrie an,⁽¹⁾ so folgt⁽²⁾

$$(2) \quad 2I(\xi) = \oint r ds,$$

wo

$$(3) \quad h(\phi) = \sum_{i=1}^n h_i(\phi), \quad \bar{h}(\phi) = \sum_{i=1}^n a_i h_i(\phi), \quad a = \text{const. ist.}$$

r bedeutet die bewichteten arithmetischen Mittel von a_i , und für R.-Kreis besteht

$$(4) \quad \sum a_i h_i(\phi) = \text{const.} \sum_{i=1}^n h_i(\phi).$$

Nehmen wir

$$(5) \quad r = \frac{\int_0^{2\pi} p(t) a(t) dt}{\int_0^{2\pi} a(t) dt},$$

statt (1), so kann man R.-Geometrie untersuchen.

Weiter besteht

$$(6) \quad \frac{ds}{d\sigma} = \rho = \frac{\sum a_i \rho_i}{\sum \rho_i}, \quad 2I = \oint \frac{\sum a_i \rho_i}{\sum \rho_i} r d\sigma,$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan Vol. XVIII, No. 7. April, 1937.]

(1) HAVILAND, E. K.: On the addition of convex curves in Bohrs theory of Dirichlet series, American Journ. of Math. LV, p. 332.

(2) SÜSS, W.: Zur relativen Diff. Geo. I, Jap. Journ. of Math. 4 p. 27.

wo ρ R.-Krümmungsradius, ρ_i Krümmungsradius von w_i .

Für R.-Scheitel besteht

$$(7) \quad \rho' = 0.$$

2. Es werden ebene Kurven betrachtet, die in jeder Richtung mindestens zwei parallele Tangenten besitzen, und es wird der Abstand Δ zweier paralleler Tangenten als Breite der Kurve bezeichnet.⁽¹⁾

Die Bogenlänge s , der Krümmungsradius R und der Winkel α , den die variable Tangente mit einer festen Tangente einschlieszt, werden als Funktionen von Δ dargestellt:

$$s = \int \Phi(\Delta) d\Delta, \quad R = \Psi(\Delta), \quad \alpha = \int \frac{\Phi(\Delta)}{\Psi(\Delta)} d\Delta.$$

Daraus ergibt sich⁽²⁾

$$(1) \quad \frac{ds}{d\sigma} = \rho = \frac{\bar{R}(\xi)}{R(\epsilon)} = \frac{d\bar{s}(\xi)}{d\bar{s}(\epsilon)} = \frac{\Psi'(\Delta)}{\Psi(\Delta)},$$

wo $\Psi'(\Delta)$ $\Psi(\Delta)$ von ϵ bedeutet.

$$(2) \quad r = \frac{p(\theta) + p(\theta + \pi)}{q(\theta) + q(\theta + \pi)},$$

$$(3) \quad s = \frac{1}{2} \int [q(\theta) + q(\theta + \pi)] d\bar{s}(\xi),$$

$$(4) \quad \sigma = \frac{1}{2} \int [q(\theta) + q(\theta + \pi)] d\bar{s}(\epsilon),$$

$$(5) \quad 4I(\xi) = \oint r ds = \oint r \rho d\sigma,$$

$$(6) \quad \Sigma = \oint d\sigma = 2I(\epsilon), \text{ u. s. w. }$$

(1) ARVESEN, O. P.: Quelques etudes sur la largeur des courbes, Avhandlingar Oslo 1926, Nr. 5, S. 18.

(2) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeo. I, Jap. Journ. of Math. 4, S. 57.

ON A PAIR OF SURFACES MUTUALLY RELATED, (VI)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, February, 9, 1937)

In this paper, we consider

$$(A) \quad \xi_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v = 0,$$

$$(B) \quad \eta(u, v) = \xi_{uv}(u, v) + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u(u, v) + \frac{1}{\lambda} \xi_v(u, v)$$

again.

(1)

We consider the surfaces

$$(1) \quad \bar{\eta} \equiv \xi + \frac{\lambda^2}{\sigma} \xi_{uu}$$

and

$$(2) \quad \xi_1 \equiv \xi + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_v,$$

then, if ξ is a sphere, we get

$$(3) \quad \bar{\eta}_{\xi_1} = 1 = \frac{4GE^2}{G_n E_v^2},$$

because we can put $F = 0$. From (3) we know that

$$(4) \quad \cos \phi = 1 - \frac{4GE^2}{G_n E_v^2},$$

where ϕ is the angle between $\bar{\eta}$ and ξ_1 ; E, F, G are first fundamental coefficients of ξ .

From (4) we know that, when two surfaces $\bar{\eta}$ and ξ_1 are perpendicular with each other, then it follows

$$(5) \quad 4GE^2 = G_{\eta}E_{\eta}^2.$$

When η and ξ_1 touch each other, then

$$(6) \quad E = 0 \quad \text{or} \quad G = 0.$$

From (6) we know that

$$(7) \quad v = \text{const.} \quad \text{or} \quad u = \text{const.}$$

From (B) it follows that

$$(8) \quad \eta^2 = \xi_{uv}^2 + \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \xi_u^2 + \frac{\xi_v^2}{\lambda^2} + 2 \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u \xi_v + \frac{2}{\lambda} \xi_{uv} \xi_v \\ + \frac{2\sigma}{\lambda^2} \xi_u \xi_v = \frac{G_{\eta}}{2G} + \frac{\sigma^2 E}{\lambda^2} + \frac{G}{\lambda^2} + \frac{\sigma E_{\eta}}{\lambda} + \frac{G_{\eta}}{\lambda}.$$

When η is a sphere, so must be true that

$$(9) \quad \frac{G_{\eta}}{2G} + \frac{\sigma^2 E}{\lambda^2} + \frac{G}{\lambda^2} + \frac{\sigma E_{\eta}}{\lambda} + \frac{G_{\eta}}{\lambda} \equiv 1.$$

If ξ is a sphere and η is a surface, so

$$(10) \quad \eta = 2(\eta \xi) \xi' - \eta = 2 \left(\xi_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v, \xi \right) \\ - \left\{ \xi_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v \right\}$$

is the inverse surface of η with respect to ξ .

(2)

If we consider a surface ξ and the LAPLACE transforms ξ_1, ξ_{-1} , then we have⁽¹⁾

(1) STETSON, J. M.: Conjugate systems of curves on a surface both of whose Laplace transforms are lines of curvature, Ann. of Math., 19, p. 106.

$$(1) \quad x_1 = x - \frac{1}{a} x_v, \quad x_{-1} = x - \frac{1}{b} x_u.$$

If x' is a radial transform of x , then

$$(2) \quad x' = \lambda / x.$$

From (1), (2) we get

$$\begin{aligned} (3) \quad D = (x_{-1}, x, x_1, x') &= \frac{x_{-1} - x_1}{x - x_1} : \frac{x_{-1} - x}{x - x'} \\ &= \frac{\left\{x - \frac{1}{b} x_u\right\} - \left\{x - \frac{1}{a} x_v\right\}}{x - \left\{x - \frac{1}{a} x_v\right\}} : \frac{x - \frac{1}{b} x_u - \frac{x}{\lambda}}{x - \frac{x}{\lambda}} \\ &= \frac{1 - \frac{a}{b} \frac{x_u}{x_v}}{1 - \frac{\lambda}{b(\lambda - 1)} \frac{x_u}{x}}, \end{aligned}$$

where D means a double ratio.

When

$$(x_{-1}, x, x_1, x') = -1,$$

so it follows that :

$$(4) \quad 2xx_v = \frac{a}{b} xx_u + \frac{\lambda}{b(\lambda - 1)} x_u x_v.$$

From (4) we know that *when x is a sphere, so we get*

$$F = 0,$$

where E, F, G are first fundamental coefficients.

(3)

Next we consider the surface \mathfrak{z} , whose equation is

$$(1) \quad \mathfrak{z} = x + \lambda x_u + \mu x_v + v\eta,$$

where η is the surface normal vector of x and λ, μ, v are scalar quantities.

From (1), (5) we get

$$(2) \quad (\xi_{-13}) = (\xi\xi) + \lambda(\xi\xi_u) + \mu(\xi\xi_v) + v(\xi\eta) \\ - \frac{1}{b}(\xi\xi_u) - \frac{\lambda}{b}(\xi_u\xi_u) - \frac{\mu}{b}(\xi_u\xi_v) - \frac{v}{b}(\eta\xi_u).$$

When ξ is a sphere then from (2) we get

$$(\xi_{-13}) = 1 - \frac{\lambda}{b}E - \frac{\mu}{b}F,$$

$$\text{i. e.} \quad \cos \widehat{\xi_{-13}} = 1 - \frac{\lambda}{b}E - \frac{\mu}{b}F.$$

(4)

In (A)

$$(1) \quad \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1},$$

then after integration it follows that

$$(2) \quad \xi = \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{u^2 + v^2 + 1},$$

where $\varphi(u)$, $\psi(v)$ are arbitrary functions of u and v respectively.

Instead of (1)

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{\sinh v}{\cosh v + a \cos u}, \\ \frac{1}{\lambda} = -\frac{a \sin u}{\cosh v + a \cos u} \end{cases}$$

existing in (A), then after integration it becomes

$$(4) \quad \xi = \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{\cosh v + a \cos u},$$

where " a " is constant.

Next we consider the surface

$$(5) \quad \eta = \xi_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v,$$

then we get

$$(6) \quad \xi\eta = \xi\xi_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi\xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi\xi_v.$$

From (6) we know that, when ξ is a sphere,

$$(7) \quad \xi\eta = 0,$$

because we can put

$$(8) \quad \xi\xi = 1, \xi\xi_u = 0, \xi\xi_v = 0, \xi_r\xi_u = 0, \xi_{uv}\xi = 0,$$

so we get the

Theorem: *The surface η is orthogonal to the sphere ξ .*

Next we have

$$(9) \quad (\eta\xi_1) = \left(\xi + \frac{\lambda}{\sigma} \xi_r, \xi_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v \right) = \frac{\lambda G_u + 2F}{2\sigma},$$

so we get the

Theorem: *In our case*

$$\cos \widehat{\eta\xi_1} = \frac{\lambda G_u + 2F}{2\sigma}.$$

If we consider the surface

$$(10) \quad \xi = \eta + \lambda \xi,$$

then from (5) and (10) we get

$$\cos \widehat{\xi\xi_1} = \lambda,$$

if ξ is a sphere.

(5)

When the surface ξ is satisfactory to (A), then we call it as L surface. With regard to finding proof of the next

Theorem : *If both surfaces ξ and $\xi + \lambda \eta$ are L surfaces, then must $\lambda = 0$, in other words $\xi + \lambda \eta$ must be ξ , where η is a surface and λ is constant.*

Proof. From our assumption we get the relation

$$\left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \lambda \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \xi}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial v} + \lambda \frac{\partial \eta}{\partial v} \right| = 0,$$

$$\text{i. e.} \quad (1) \quad \mathfrak{D} + H\lambda + K\lambda^2 + L\lambda^3 = 0,$$

where

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{D} \equiv \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial v} \right|, \\ L \equiv \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial v} \right|, \\ H \equiv \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial v} \right|, \\ K \equiv \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial v} \right|. \end{cases}$$

If $\mathfrak{D} = 0$, then from (1) we get

$$\lambda = 0, \quad \text{Q. E. D.}$$

When

$$L = 0,$$

then one of λ must be equal to infinity.

(6)

Let us consider a surface ξ , with a parametric vector equation

$$(1) \quad \xi = \xi(u, v);$$

a point P_r on ξ ; and any line l through P_r but not in the tangent plane of ξ at P_r , where l is determined by the point P_r and the point P_v defined by

$$(2) \quad \eta = \xi_{uv} + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v.$$

The distance between P_x and P_y is given by

$$(3) \quad \sqrt{(\xi\eta)} \equiv \sqrt{(\xi\xi_{uv}) + \frac{\sigma}{\lambda} (\xi\xi_u) + \frac{1}{\lambda} (\xi\xi_v)}.$$

When ξ is a sphere then (3) becomes zero.

Next we consider

$$(4) \quad \delta = \frac{1}{2} \left(-\xi + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u + \frac{1}{\lambda} \xi_v + \xi_{uv} \right).$$

If ξ lies on ξ then

$$(5) \quad -(\xi\xi) + \frac{\sigma}{\lambda} (\xi\xi_u) + \frac{1}{\lambda} (\xi\xi_v) + (\xi\xi_{uv}) = 0.$$

When ξ is a sphere then from (5) we get

$$(6) \quad (\xi\xi) = 0,$$

i. e. ξ is a point.

The distance between P_y and a LAPLACE transform ξ_1 of ξ is given by

$$(7) \quad (\xi\xi_{uv}) + \frac{\sigma}{\lambda} (\xi\xi_u) + \frac{1}{\lambda} (\xi\xi_v) + \frac{\sigma}{\lambda} (\xi_u\xi_{uv}) \\ + \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 (\xi_u)^2 + \frac{\sigma}{\lambda^2} (\xi_u\xi_v),$$

because

$$(8) \quad \xi_1 = \xi + \frac{\sigma}{\lambda} \xi_u.$$

When ξ is a sphere then (7) can be put in the form

$$(9) \quad \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\lambda} E_v + \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 E,$$

because we can put $(\xi_u\xi_v) = 0$.

From (9) we get the

Theorem : When \mathfrak{x} is a sphere then the distance between \mathfrak{x}_1 and \mathfrak{x} is given by (9).

With the same reasoning, if we take \mathfrak{x}_{-1} instead \mathfrak{x}_1 , we can investigate (9) also.

When the points \mathfrak{y} , \mathfrak{x} , \mathfrak{x}_1 and \mathfrak{x}_{-1} are on a surface \mathfrak{z} then we get

$$(10) \quad \begin{cases} (\delta \mathfrak{x}_{uv}) + \frac{\sigma}{\lambda} (\delta \mathfrak{x}_u) + \frac{1}{\lambda} (\delta \mathfrak{x}_v) = 0, \\ (\delta \mathfrak{x}) = 0, \\ (\delta \mathfrak{x}) + \frac{\sigma}{\lambda} (\delta \mathfrak{x}_u) = 0, \\ (\delta \mathfrak{x}) + \frac{1}{\lambda} (\delta \mathfrak{x}_v) = 0. \end{cases}$$

From (10) we have

$$(11) \quad (\delta \mathfrak{x}_{uv}) = 0,$$

so we have the

Theorem : When the four points \mathfrak{y} , \mathfrak{x} , \mathfrak{x}_1 and \mathfrak{x}_{-1} are on a surface then (11) is true.

When the distances between \mathfrak{x} , \mathfrak{y} and \mathfrak{x}_1 , \mathfrak{x}_{-1} are equal then we get

$$(12) \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + \frac{\sigma}{\lambda^2} (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_{uv}),$$

because

$$(13) \quad \begin{cases} (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) \equiv (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_{uv}) + \frac{\sigma}{\lambda} (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_u) + \frac{1}{\lambda} (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_v), \\ (\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_{-1}) \equiv (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + \frac{\sigma}{\lambda} (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_u) + \frac{1}{\lambda} (\mathfrak{x}\mathfrak{x}_v) + \frac{\sigma}{\lambda^2} (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v). \end{cases}$$

When \mathfrak{x} is a sphere then the distances between \mathfrak{y} , \mathfrak{x}_1 ; \mathfrak{x} , \mathfrak{x}_1 ; \mathfrak{x} , \mathfrak{x}_{-1} ; \mathfrak{x} , \mathfrak{y} ; \mathfrak{x}_1 , \mathfrak{x}_{-1} and \mathfrak{y} , \mathfrak{x}_{-1} are given by $-\frac{\sigma^2}{\lambda^2} E + \frac{1}{2} E_v$, 0, 0, 0, 1 and $\frac{1}{2\lambda} G_u + \frac{1}{\lambda^2} G$ respectively.

(7)

We consider the net N_x generated by P_x whose coordinates x are functions of two independent variables u, v and satisfy an equation of LAPLACE,

$$(1) \quad x_{uv} = -\frac{\sigma}{\lambda} x_u - \frac{1}{\lambda} x_v.$$

Any congruence $\rho\sigma$ harmonic to the net N_x consists of lines crossing the tangents of N_x in the points ρ, σ defined by

$$(2) \quad \rho = \left(\frac{x}{\theta} \right)_u, \quad \sigma = \left(\frac{x}{\theta} \right)_v,$$

where θ is a solution of (1).

The same result can also be reached by observing that (1) can be written in the form

$$(3) \quad (x/\theta)_{uv} = A(x/\theta)_u + B(x/\theta)_v,$$

where

$$(4) \quad A = -\frac{\sigma}{\lambda} - (\log \theta)_v, \quad B = -\frac{1}{\lambda} - (\log \theta)_u.$$

If a second net N_y is also harmonic to the congruence $\rho\sigma$, the proportional factor of y can be chosen so that each of the lines $\rho\sigma$ crosses the corresponding tangents of N_y in the points y_u, y_v . Since the points ρ, y_u coincide at one focal point of the line $\rho\sigma$, and the points σ, y_v at the other, it follows that

$$(5) \quad y_u = m(x/\theta)_u, \quad y_v = n(x/\theta)_v,$$

where m, n are scalar functions of u, v which are restricted to satisfy the integrability conditions that result from equating the two expressions for y_{uv} derivable from equations (5) in the presence of equation (3), namely,

$$(6) \quad m_v = A(n - m), \quad n_u = B(m - n).$$

The point equation of the net N_y is $(y_u/m)_v = (y_v/n)_u$, and can be reduced to

$$(7) \quad y_{uv} = A y_u/m + B y_v/n.$$

The solution of the problem at hand can be formulated in the following.

Theorem: *When a net N_r with the point equation (1) is given, any net N_y which is an F transform of N_r can be determined by first finding a solution θ of equation (1), by next calculating A, B in (4), then by solving equations (6) for m, n , and by finally performing the quadrature indicated by equations (5) for y , we define as follows: The transformation F between two surfaces is a one-to-one correspondence between their points such that the lines joining corresponding points form a congruence whose developables intersect both surfaces in conjugate nets which are conjugate to the congruence.*

(8)

We consider

$$(1) \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \frac{\sigma}{\lambda} \mathfrak{x}_u + \frac{1}{\lambda} \mathfrak{x}_v,$$

then from (B) and (1) we get

$$(2) \quad (\mathfrak{y}) = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\lambda} E_v + \frac{\sigma^2}{\lambda^2} E + \frac{1}{2\lambda} G_u + \frac{1}{\lambda^2} G,$$

when \mathfrak{x} is a sphere.

So we have the

Theorem: *When \mathfrak{x} is a sphere then*

$$\cos \phi = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\lambda} E_v + \frac{\sigma^2}{\lambda^2} E + \frac{1}{2\lambda} G_u + \frac{1}{\lambda^2} G,$$

where ϕ is the angle between \mathfrak{z} and \mathfrak{y} .

From \mathfrak{z} and (1), (2) in (1) we get

$$(3) \quad (\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{y}}) = 1 + \frac{1}{2} \lambda E_v + \frac{1}{\sigma} G_u,$$

$$(4) \quad (\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1) = 1 + G/\sigma,$$

when \mathfrak{x} is a sphere, so we have the

Theorem : *When \mathfrak{x} is a sphere then*

$$\cos \phi_1 = 1 + \frac{1}{2} \lambda E_v + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\sigma} G_u,$$

$$\cos \phi_2 = 1 + G/\sigma,$$

where ϕ_1 and ϕ_2 are angles between \mathfrak{x} and $\bar{\mathfrak{y}}$; \mathfrak{x} and \mathfrak{x}_1 respectively.

(9)

The projective normal joins the point \mathfrak{x} to the point⁽¹⁾

$$(1) \quad \alpha \equiv -\frac{2\sigma}{\lambda} \mathfrak{x}_{rv} + \left\{ -\lambda^{-1} - \frac{\lambda}{2\sigma} (\sigma/\lambda)_u \right\} \mathfrak{x}_u \\ - \frac{1}{2} (\sigma/\lambda)_v \mathfrak{x}_v.$$

When \mathfrak{x} is a sphere then we have

$$(\alpha \mathfrak{x}) = 0,$$

so α is perpendicular to \mathfrak{x} .

When α is a point so follows

$$(2) \quad 0 = \left(\frac{2\sigma}{\lambda} \right)^2 t + \left\{ -\lambda^{-1} - \frac{\lambda}{2\sigma} (\sigma/\lambda)_u \right\} E + \left\{ 2^{-1} (\sigma/\lambda)_v \right\}^2 G \\ - \frac{2\sigma}{\lambda} \left\{ -\lambda^{-1} - \frac{\lambda}{2\sigma} (\sigma/\lambda)_u \right\} (F_v - \frac{1}{2} G_u) \\ + \sigma/\lambda \left\{ 2^{-1} (\sigma/\lambda)_v \right\} G_u + \left\{ \lambda^{-1} + \frac{\lambda}{2\sigma} (\sigma/\lambda)_u \right\} (\sigma/\lambda)_v F$$

(1) LANE, E. P.: Contributions to the theory of conjugate nets, Am. J. of Math. XLIX (1927), p. 565.

where

$$t = N^2 + \frac{1}{4D^2} (G_u^2 G + 2G_u G_v F + G_v^2 E - 4G_u F_v G - 4G_v F_u F + 4F_v^2 G),$$

$$D^2 = EG - F^2.$$

ÜBER FLÄCHEN UND KURVEN (XVIII):

Bemerkungen über Eilinen und Eiflächen

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, February 22, 1937)

Im folgenden mögen wir einige Bemerkungen über Eilinen und Eiflächen mitteilen.

(1)

Satz: Wenn die Krümmungsfunktion $1/\rho$ eine stetig gekrümmte konvexgeschlossene Kurve

$$(1/\rho)_0 = (1/\rho)_{0+\pi}$$

erfüllt, so muss sie eine Mittelpunktkurve sein.

Beweis: Setzen wir

$$(1) \quad (1/\rho)_0 = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

so folgt⁽¹⁾

$$(2) \quad (1/\rho)_{0+\pi} = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\theta + k\pi) + b_k \sin(k\theta + k\pi)\}.$$

Aus (2) ergibt sich⁽²⁾

$$(3) \quad (1/\rho)_{0+\pi} = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Vol. XVIII No. 9, April, 1937.]

(1) Vergl. KUBOTA, T.: Einige Probleme über konvex-geschlossene Kurven und Flächen, Tôhoku Math. Journ. Vol. 17 (1920), p. 351.

(2) NAKAJIMA, S.: Einige Probleme über konvexe Flächen und Kurven, Tokyo Butu rigakkô Zasshi, 34 (1926), p. 284.

also aus

$$(1/\rho)_0 = (1/\rho)_{0+\pi},$$

folgt

$$a_{2n+1} = b_{2n+1} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

so bekommt man

$$(4) \quad 1/\rho = a_0/2 + \sum_{p=1}^{\infty} (a_{2p} \cos 2p\theta + b_{2p} \sin 2p\theta), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Im folgenden betrachten wir, wie der obige Satz in relativer Differentialgeometrie ist.

Setzen wir

$$[\bar{\rho}(x)/\bar{\rho}(e)]_0 = [\bar{\rho}(x)/\bar{\rho}(e)]_{0+\pi},$$

so folgt

$$\bar{\rho}(x)/\bar{\rho}(e) = a_0/2 + \sum_{p=1}^{\infty} (a_{2p} \cos 2p\theta + b_{2p} \sin 2p\theta),$$

d. h.

$$\bar{\rho}(x)/\bar{\rho}(e)$$

verhält sich gleich im Gegenpunkte.

(2)

Im folgenden mögen wir die relative Flächentheorie untersuchen. Wenn man einen nichtparabolischen Flächenpunkt von $x(u, v)$ als Anfangspunkt, die Tangentenebene als xy Ebene und die Relativnormale als z Achse annimmt, so ist die Gleichung der Fläche (A) in der Form

$$(1) \quad 2z = Ax^2 + 2Hxy + By^2 + \dots$$

Dann gibt es ∞^1 Relativkugeln, die die gegebene Fläche im betreffenden Punkte berühren und die Gleichung der berührenden Relativkugeln (B) mit dem Radius R ist in der Form

$$(2) \quad 2z = 1/R (ax^2 + 2hxy + by^2) + \dots$$

Es seien x, y, z rechtwinklige Koordinaten, so erhalten wir aus (1), (2) als Differentialgleichung der Relativminimallinien von (A) und (B)

$$(3) \quad [1 + A^2x^2 + H^2y^2 + 2Hxy + \dots] dx^2 + 2[AHx^2 + (AB + H^2)xy + HBy^2 + \dots] dxdy + [1 + H^2x^2 + B^2y^2 + 2HBxy + \dots] dy^2 = 0$$

und

$$(4) \quad [R^2 + a^2x^2 + h^2y^2 + 2ahxy + \dots] dx^2 + 2[ahx^2 + (ab + h^2)xy + bhy^2 + \dots] dxdy + [R^2 + h^2x^2 + b^2y^2 + 2bhxy + \dots] dy^2 = 0.$$

Die Differentialgleichungen der Relativkrümmungskurven von (A) und (B) sind

$$(5) \quad d(Ax + Hy + \dots) \cdot [dy + (Hx + By + \dots)] dz = d[Hx + By + \dots] \cdot [dx + (Ax + By + \dots) dz]$$

und

$$(6) \quad d\left(\frac{a}{R}x + \frac{h}{R}y + \dots\right) \cdot \left[dy + \left(\frac{h}{R}x + \frac{b}{R}y + \dots\right) dz\right] \\ = d\left(\frac{h}{R}x + \frac{b}{R}y + \dots\right) \cdot \left[dx + \left(\frac{a}{R}x + \frac{b}{R}y + \dots\right) dz\right].$$

Die Differentialgleichungen der Relativhauptidektantenkurven von (A) und (B) sind

$$(7) \quad [A + \dots] dx^2 + (H + \dots) dxdy + (B + \dots) dy^2 = 0$$

und

$$(8) \quad [a/R + \dots] dx^2 + 2[h/R + \dots] dxdy + [b/R + \dots] dy^2 = 0.$$

Wenn in der Umgebung vom Ursprungspunkt die Gleichungen von Relativhauptidektantenkurven von (A) und (B)

$$(9) \quad A dx^2 + 2 H dx dy + B dy^2 = 0$$

und

$$(10) \quad a dx^2 + 2 h dx dy + b dy^2 = 0$$

sind, so sind die beiden Richtungen von (10) im relativgeometrischen Sinne zueinander senkrecht, falls sie die isotropen Richtungen harmonisch teilen.

Noch besteht

$$(11) \quad 1/R = 0,$$

wenn beide Paare der Richtungen von (9) (10) harmonisch geteilt werden (1), wo R den Radius von Mittenrelativkugel bedeutet.

Nach KUBOTAS Arbeit⁽¹⁾ kann man wissen, dass das vollständige Analogon des Satzes HIRAKAWAS besteht.⁽²⁾

Im Ursprung besteht

$$(12) \quad \partial^2 k_2 / \partial x^2 - \partial^2 k_1 / \partial y^2 = 2 / (k_2 - k_1) \{ (\partial k_2 / \partial x)^2 + (\partial k_1 / \partial y)^2 \} \\ + k_1 k_2 (k_2 - k_1),$$

wo

$$(13) \quad k_1 = 1/R_1, \quad k_2 = 1/R_2,$$

R_1, R_2 die relativen Hauptkrümmungsradien bedeuten.⁽³⁾

Betrachten wir die neue Relativkrümmung $1/S$ sowie

$$(14) \quad 1/S = \cos^2 \vartheta / R_2 - \sin^2 \vartheta / R_1.$$

Wenn θ und ϑ der Beziehung⁽⁴⁾

$$(15) \quad \sin \vartheta = \sqrt{(R_1 - R_2) / (R_1 + R_2)} \sin \theta$$

(1) KUBOTA, T.: Krümmungstheorie in der relativen Flächentheorie, Jap. Journ. of Math. Vol. XII (1935) p. 21.

(2) Tokyo Buturigakkô Zassi 42 (1933), p. 346.

(3) HAYASI, T.: On a Theorem due to Prof. Nakajima in the Theory of Surface, Tôhoku Math. Journ. 31 (1929), p. 430.

(4) OCCHIPINTI, R.: Su una nuova curvatura delle linee di una superficie, Giornale di Mat. 66, p. 51-68.

genügen, hat man

$$(16) \quad S = R,$$

wo

$$(17) \quad 1/R = \cos^2 \theta / R_2 + \sin^2 \theta / R_1$$

ist.

Die Maxima und Minima von S sind R_1 und $-R_2$, mit einer Ausnahme des Falls

$$(18) \quad 1/R_1 + 1/R_2 = 0,$$

wo die Relativindicatrix ein Relativkreis ist.

Die speziellen Kurven, längs deren

$$(19) \quad 1/S = 0$$

ist, nennt man „*Relativcharakteristische Linien*.“

Wir nennen

$$(20) \quad 1/R_1^2 + 1/R_2^2$$

Relativcasoratis Krümmungsmass.“

Sind ferner $1/\rho$ und $1/\rho'$ die Relativkrümmungen, die irgend zwei durch einen Punkt auf einer Fläche S gehenden und aufeinander senkrecht stehenden Normalschnitten von S gehören, so ist

$$(21) \quad 1/\rho + 1/\rho' = 1/R_1 + 1/R_2.$$

Weiter kann man GROSSES Satz⁽⁵⁾ in Relativgeometrie untersuchen.

Nach KUBOTA ist das Analogon des BLASCHKESCHEN Satzes⁽⁶⁾

$$(22) \quad R = R_2 \cos^2 \theta + R_1 \sin^2 \theta.$$

Wir setzen

$$(23) \quad 1/1'|\overline{R}| = r$$

(5) GROSSE, E.: Darstellung elliptischer Funktionen durch Flächen, Königliche Wilhelms-Gymnasium, 1882/83. S. 9.

(6) l. c. (1), p. 25.

und deuten r und ϑ_1 als Polarkoordinaten, $y_1 = r \cos \vartheta_1$ und $y_2 = r \sin \vartheta_1$ als rechtwinklige kartesische Koordinaten in einer Ebene.

Aus (22) folgt dann

$$(24) \quad R_2 y_1^2 + R_1 y_2^2 = \text{sign } R,$$

d. h. die Gleichung eines Relativkegelschnittes, den wir die Relativindikatrix der quadratischen Form z nennen.

Es gelten sich folgende Fälle:

I. $R_1 R_2 > 0$, z ist definit.

A. $R_2 > 0$, z ist positiv definit, $\text{sign } R = +1$ und (24) eine Relativellipse mit den Halbachsen $1/\sqrt{R_2}$ und $1/\sqrt{R_1}$.

B. $R_2 < 0$, z ist negativ definit, $\text{sign } R = -1$ und (24) ebenfalls eine Relativellipse, nämlich

$$(25) \quad -R_2 y_1^2 - R_1 y_2^2 = 1.$$

II. $R_1 R_2 < 0$, z ist indefinit, (24) ein Paar konjugierter Relativhyperbeln, deren Asymptoten die Gleichung

$$(26) \quad y_2 = \pm \sqrt{-R_2/R_1} \cdot y_1$$

haben, mit der y_1 -Achsen also den Relativwinkel

$$(27) \quad \vartheta_1 = \pm \arctan \sqrt{-R_2/R_1}$$

einschlieszen.

Von den beiden konjugierten Relativhyperbeln (24) dient die eine zur Veranschaulichung der positiven, die andere zur Veranschaulichung der negativen Werte von R .

In den ursprünglichen allgemeinen Parametern sind die Richtungen der Asymptoten der Relativindikatrix durch die Gleichung

$$(28) \quad z = 0$$

gegeben; sie sind reell oder imaginär, je nachdem z indefinit oder definit ist.

Legen wir zu jeder Tangentenebene einer Fläche (A) eine Parallelebene im R.-Abstand

$$(29) \quad x_4 = \frac{1}{2}(R_1 + R_2),$$

so umhüllt diese die R.-Mittenevolute von \mathfrak{F} .

4_4 ist der R.-Halbmesser der Mittenkugel und R_1 die R.-Hauptkrümmungsradien von \mathfrak{F} .

Zu einer L.-Relativminimalfläche gehört eine Relativminimalfläche als L.-Mittenrelativevolute.

Bezeichnet P den R.-Abstand vom Koordinatenursprung einer Tangentenebene von \mathfrak{F} , und \bar{P} den der dazu parallelen Tangentenebene an die Mittenrelativevolute, so ist $\bar{P} = P + x_4$.

$$(30) \quad - (R_1 + R_2) = C$$

ist die Paralleelfläche der L.-Relativminimalflächen und für $c = 0$ die L.-Relativminimalflächen selbst.

Wenn

$$f(R_1, R_2) = 0$$

besteht, so ist unsere Fläche R.-*Weingartenfläche*.

Weiter kann man unseren Satz⁽⁷⁾ in R.-*Geometrie* verallgemeinern, z. B. wenn

$$4p \geq s^2,$$

so muss unsere Fläche R.-Kugel sein, wo

$$p = R_1 R_2, \quad s = R_1 + R_2.$$

Das Variationsproblem für Flächen, dessen Extremalen die M.-Relativminimalflächen sind, schreibt sich in Bewegungsinvarianten in der Form

$$\delta \iint (1/R_1 - 1/R_2)^2 dF = 0,$$

wo dF das Element der Eichoberfläche ist, und das zu den L.-Relativminimalflächen gehörige Problem ist aber

(7) NAKAJIMA, S.: Über charakteristische Eigenschaften der Kugel, Tôhoku Math. Journ., Vol. 26 (1926), p. 361.

$$\partial \{ (R_1 - R_2)^2 d\Omega = 0 ,$$

wo $d\Omega$ das Element der Oberfläche der Eichfläche ist.

Die Differentialgleichungen der M.-und L.-Relativminimalflächen werden in Bewegungsinvarianten und BELTRAMISCHEN Differentiatoren geschrieben :

$$A_2 (1/R_1 + 1/R_2) = - \frac{1}{2} (1/R_1 + 1/R_2) (1/R_1 - 1/R_2)^2$$

und

$$A_2 (R_1 + R_2) = 0 .$$

Weiter kann man untersuchen wie in LAMPES Arbeit.⁽⁸⁾

Ist⁽⁹⁾

$$(31) \quad \begin{cases} R = R_2 \cos^2 \theta + R_1 \sin^2 \theta , \\ R' = R'_2 \cos^2 \theta + R'_1 \sin^2 \theta \end{cases}$$

und

$$(32) \quad R_2 + R'_2 = R_1 + R'_1 = \mu ,$$

so folgt

$$(33) \quad R + R' = \mu$$

so ergibt sich der

Satz : Wenn (31), (32) in Gegenpunkten bestehen, so entsteht (33).

Betrachten wir zwei Gleichungen

$$2z = 1/R (ax^2 + 2hxy + by^2) + \dots ,$$

$$2z = 1/R (\bar{a}x^2 + 2\bar{h}xy + \bar{b}y^2) + \dots$$

wie in (32), so folgt

$$0 = (a - \bar{a}) x^2 + 2(h - \bar{h}) xy + (b - \bar{b}) y^2 + \dots .$$

Im Ursprung besteht

$$(a - \bar{a}) x^2 + 2(h - \bar{h}) xy + (b - \bar{b}) y^2 = 0 .$$

(8) LAMPL, E.: Über eine Frage aus der Theorie der geometrischen Mittelwerte, Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, 1-3 (1902-04), S. 9.

(9) KUBOTA, T.: Krümmungstheorie in der relativen Flächentheorie, Japanese Journ. of Math. Vol. XII. p. 25.

(3)

I. Man kann BOSES Satz⁽¹⁾ wie in meiner Arbeit⁽²⁾ beweisen nach graphischer Darstellung von

$$U(\phi) - U(\phi + 2\pi/n),$$

wo

$$U(\phi) = \sum_{k=0}^{n-1} p(\phi + 2k\pi/n).$$

II. Aus DOETSCHS Arbeit⁽³⁾ ergibt sich

$$(1) \quad r'(a)/r(a) = h'(\varphi)/h(\varphi).$$

Nun haben wir⁽⁴⁾

$$(2) \quad rp' = h^2.$$

Aus (1), (2) folgt

$$r'(a)^2/r(a) = h(\varphi)^2/p',$$

$$\text{d. h. } (3) \quad p' = h^2 r / r'^2.$$

Ist $\triangle OPC$ rechtwinkliges Dreieck, in dem $\angle COP = \angle R$ ist, erhält man $OP = r(a) \cot(a - \varphi)$, wo

$$\begin{aligned} (4) \quad \frac{d(\overline{OP})}{da} &= \frac{r'(a) \cos(a - \varphi) \sin(a - \varphi) + r(a)(d\varphi/da - 1)}{\sin^2(a - \varphi)} \\ &= r(a) + \frac{r(a)(d\varphi/da - 1)}{\sin^2(a - \varphi)}. \end{aligned}$$

Ist $d(\overline{OP})/da = 0$, so folgt

$$(5) \quad d\varphi/da = \cos^2(a - \varphi).$$

Korrespondieren $P, R, dP/d\psi$ in Pedalkurve bzw. mit p, r, p'

-
- (1) BOSE, R. C.: A theorem on equiangular convex polygons circumscribing a convex curve, Journal of the Indian Math. Society, Vol. 11 (1936), p. 96.
 (2) MATUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (XIII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ., Vol. XV, No. 9 (1935), p. 205.
 (3) DOETSCH, G.: Konvexe Kurven und Fuszpunktkurven, Math. Z. 41, S. 718.
 (4) WILLIAMSON, B.: Differential Calculus, p. 228.

in Eilinie in DOETSCHS Arbeit,⁽⁶⁾ so kann man aus HAYASHIS Arbeit⁽⁸⁾ die Beziehung leicht wissen :

$$(6) \quad R = p, \quad P = p^2 / (p^2 + p'^2)^{1/2}, \quad dP/d\varphi = pp' / (p^2 + p'^2)^{1/2},$$

d. h.

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dP/d\varphi}{P} = \frac{dp/d\varphi}{p}, \\ R/P = rp. \end{cases}$$

Satz : 1 von DOETSCH⁽⁷⁾ auch in R.-Geometrie besteht, wobei statt

$$(8) \quad r'(a)/r(a) = h'(\varphi)/h(\varphi)$$

$$(9) \quad \frac{h'(\varphi)/h(\varphi)}{H'(\varphi)/H(\varphi)} = \frac{r'(a)/r(a)}{R'(a')/R(a')} \left[= \frac{\tan(a-\varphi)}{\tan(a'-\varphi)} \right]$$

gilt, wo $h, r; H, R$ zu ξ -Kurve bzw. ϵ -Kurve gehören, weil

$$h(\varphi) = r(a) \cos(a - \varphi),$$

$$H(\varphi) = R(a') \cos(a' - \varphi),$$

$$h'(\varphi) = r(a) \sin(a - \varphi),$$

$$h'(\varphi)/h(\varphi) = \tan(a - \varphi),$$

$$H'(\varphi)/H(\varphi) = \tan(a' - \varphi),$$

$$r'(a) \cos(a - \varphi) - r(a) \sin(a - \varphi) = 0,$$

$$R'(a') \cos(a' - \varphi) - R(a') \sin(a' - \varphi) = 0$$

bestehen.

Wir studieren den Satz⁽⁸⁾ 2 in R.-Geometrie. Aus (8) und

$$\frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)} = \frac{r'(a)}{r(a)} \frac{da}{d\varphi} - \frac{\sin(a - \varphi)}{\cos(a - \varphi)} \left(\frac{da}{d\varphi} - 1 \right),$$

(5) l. c. (3).

(6) HAYASHI, T.: An analytical solution of Biots Problem, Annals of Math. 22. p. 215.

(7) l. c. (3).

(8) l. c. (3).

$$\frac{H'(\varphi)}{H(\varphi)} = \frac{R(\alpha')}{R(\alpha')} \frac{d\alpha'}{d\varphi} - \frac{\sin(\alpha' - \varphi)}{\cos(\alpha' - \varphi)} \left(\frac{d\alpha'}{d\varphi} - 1 \right)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} (10) \quad \frac{h'(\varphi)/h(\varphi)}{H'(\varphi)/H(\varphi)} \left[-\frac{d\alpha'}{d\varphi} + \frac{d\sigma}{d\varphi} + \frac{R(\alpha)}{R'(\alpha')} \frac{\sin(\alpha' - \varphi)}{\cos(\alpha' - \varphi)} \right] \\ = \frac{R(\alpha')}{R'(\alpha')} \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)} \left(\frac{d\alpha}{d\varphi} - 1 \right) \end{aligned}$$

(10) ist unser Resultat.

III. Man kann eine meiner Arbeiten⁽¹⁾ in R.-Geometrie verallgemeinern.⁽²⁾

(4)

In HAYASIS Arbeit⁽³⁾ kann man wissen :

$$\angle mOM = \frac{\pi}{2} - \mu, \quad \angle OMT = \mu, \quad \angle TOM = \frac{\pi}{2} - \mu,$$

$$\angle m_1Om = 2\mu + 2\mu_1, \quad \angle Omm_1 = \pi - 2\mu,$$

$$\angle mm_1O = \pi - 2\mu_1, \quad \angle T_1M_1O = \mu_1, \quad \angle T_1OM_1 = \frac{\pi}{2} - \mu_1,$$

$$\frac{r}{\sin 2\mu_1} = \frac{Om_1}{\sin(\pi - 2\mu)} \quad \therefore \quad Om_1 = \frac{r \sin(\pi - 2\mu)}{\sin 2\mu_1}$$

$$\therefore \quad Om_1 = \frac{r \sin 2\mu}{\sin 2\mu_1},$$

$$OM_1 = \frac{r \sin 2\mu}{\sin 2\mu_1} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \mu_1\right) = \frac{r \sin 2\mu \sin \mu_1}{\sin 2\mu_1},$$

$$OT_1 = \frac{r \sin 2\mu \sin^2 \mu_1}{\sin 2\mu_1}.$$

Es wird daraus erhalten :

- (1) MATUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (XIII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 15, p. 213.
- (2) HIRAKAWA, J.: The Euclidean Relative Differential Geo. II, Jap. Journ. of Math. XIII (1936), p. 85.
- (3) HAYASI, T.: An analytical solution of BIOT's problem, Annals of Math., Vol. 22, p. 215.

$$r \sin^2 \mu + \frac{r \sin 2\mu \sin^2 \mu_1}{\sin 2\mu_1} = \text{const.},$$

i. e.
$$\frac{r \sin 2\mu}{2} [\tan \mu + \tan \mu_1] = \text{const.},$$

wo
$$r = Om.$$

(5)

I. Betrachten wir⁽¹⁾

$$(1) \quad \rho = kA + k/2 \cos 2s/k,$$

wo s = Bogenlänge, k = positive Länge; A = reelle Zahl ist.

Aus (1) folgt⁽²⁾

$$(2) \quad d\rho/ds = -\sin 2s/k,$$

so kann man wissen, dass Affinnormale und gewöhnliche Normale miteinander zusammenfallen, wenn

$$(3) \quad s = nk \frac{\pi}{2}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ist.

II. Benutzen wir unsere Formel

$$(1) \quad 1/3 \, d\rho/ds = \tan \varphi$$

zur natürlichen Geometrie, so ergibt sich aus (3) in CESAROS Buch:⁽³⁾

$$(2) \quad \begin{cases} dR/ds = -d\rho/ds / \sqrt{9 + (d\rho/ds)^2}, \\ d\theta/ds = -1/\rho + 3/R \sqrt{9 + (d\rho/ds)^2}. \end{cases}$$

Für Rollkurve auf einer Gerade erhält man

$$(3) \quad ds^* = R/\rho \, ds, \quad 1/\rho^* = -1/R + 3\rho/R^2 \sqrt{9 + (d\rho/ds)^2}.$$

(1) HOEL, O.: Über die Eulersche Kurve, deren Bogen sich durch Kreisbogen darstellen lassen, Anais Porto 15, 5-25.

(2) MATUMURA, S.: Über einen affineo. Satz und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ. 36, p. 189.

(3) KOWALEWSKI, G.: CESARO, Vorlesungen über natürliche Geometrie, Leipzig, Berlin 1926, S. 22.

und für Inversionskurve :

$$(4) \quad ds'/ds = a^2/R^2, \quad 1/\rho' = -R^2/a^2\rho + 6R/a^2\sqrt{9 + (d\rho/ds)^2}.$$

(6)

Man lege die Ebenekurve $\mathfrak{x}(t)$ vor und setze voraus, dass die Tangente von $\mathfrak{x}(t)$ im Punkte t zur entsprechenden Tangente von $\mathfrak{c}(t)$ im Punkte t zur entsprechenden Tangente von $\mathfrak{c}(t)$ parallel ist.

Gesucht sei im Kurvenpunkt t oskulierender Relativkreis, n. h. Relativschmiegleichkreis. Bezeichnet man den Krümmungsradius der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ mit $r(t)$, dann ist der gesuchte Relativschmiegleichkreis durch

$$(1) \quad \bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}(t) - \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} \mathfrak{c}(t) + \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} \mathfrak{c}(\sigma),$$

darstellbar, wobei \bar{r} den Krümmungsradius der Eichkurve \mathfrak{c} und σ einen veränderlichen Parameter bedeutet.⁽¹⁾

Die Koordinaten des Zentrums \mathfrak{z} vom Relativschmiegleichkreise sind in der Vektorform

$$(2) \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{x}(t) - \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} \mathfrak{c}(t)$$

darstellbar.

Liegt der Punkt (2) auf einer Kurve \mathfrak{y} , so entsteht

$$(\mathfrak{z}\mathfrak{y}) - r/\bar{r}(\mathfrak{c}\mathfrak{y}) = 0,$$

$$\text{d. h. } (3) \quad (\mathfrak{z}\mathfrak{y})/(\mathfrak{c}\mathfrak{y}) = r/\bar{r}.$$

Aus (2) und (3) erhält man

$$(4) \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{x} - \frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{y})}{(\mathfrak{c}\mathfrak{y})} \mathfrak{c}.$$

Die Koordinaten des Zentrums \mathfrak{v} vom Relativschmiegleichkreise von

(1) KUBOTA, T.: Krümmungstheorie in der relativen Kurventheorie, The Science Reports of the Tôhoku Imp. Univ. (Professor K. HONDA Anniversary volume) October, 1936.

\mathfrak{z} sind

$$(5) \quad \mathfrak{v} = \left\{ \mathfrak{x} - \frac{r}{r} \mathfrak{e} \right\} - \frac{R}{r} \mathfrak{e} = \mathfrak{x} - \frac{r+R}{r} \mathfrak{e},$$

wo R Krümmungsradius der Kurve \mathfrak{z} bedeutet.

Aus (5) ergibt sich der

Satz: \mathfrak{v} stellt die Koordinaten des Zentrums vom Relativschmiegekreise von \mathfrak{x} dar, deren Krümmungsradius $r + R$ ist.

BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XIX)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, June 7, 1937.)

Im folgenden mögen wir einige Sätze über Kreise und Kugeln beweisen.

(1)

Wir betrachten zwei geodätische Parallelkurven

$$(1) \quad Pdt + Qd\tau = 0,$$

$$(2) \quad P'dt + Q'd\tau = 0$$

auf einer Kreisfläche, so folgt

$$(3) \quad \tan \phi = \frac{H \sqrt{(P'Q + PQ')^2 - 4PP'QQ'}}{(\theta_i \bar{\theta}_i) QP' - (\bar{Q}_i Q_\tau) (P'Q + PQ') + (\theta_\tau \bar{\theta}_\tau) PP'}$$

wo ϕ der Winkel zwischen (1) und (2) ist und

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{HQ}{\sqrt{(\theta_i \bar{\theta}_i) Q^2 - 2(\bar{\theta}_i \theta_\tau) PQ + (\theta_\tau \bar{\theta}_\tau) P^2}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{HP}{\sqrt{(\theta_i \bar{\theta}_i) Q^2 - 2(\bar{\theta}_i \theta_\tau) P'Q + (\theta_\tau \bar{\theta}_\tau) P'^2}} \right), \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{HQ'}{\sqrt{(\theta_i \bar{\theta}_i) Q'^2 - 2(\bar{\theta}_i \theta_\tau) P'Q' + (\theta_\tau \bar{\theta}_\tau) P'^2}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{HP'}{\sqrt{(\theta_i \bar{\theta}_i) Q'^2 - 2(\bar{\theta}_i \theta_\tau) P'Q' + (\theta_\tau \bar{\theta}_\tau) P'^2}} \right), \\ & H = \sqrt{(\theta_i \bar{\theta}_i) (\theta_\tau \bar{\theta}_\tau) - (\bar{\theta}_i \theta_\tau)^2} \end{aligned} \right.$$

besteht.⁽¹⁾

(2)

Die überstrichenen Buchstaben beziehen sich auf die Elemente der Parallelfäche \bar{F} einer gegebenen Fläche F im Abstände a , so folgt⁽¹⁾

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{E} = (1 - a^2 \Sigma) E - a(2 - aH) L, \\ \bar{F} = (1 - a^2 \Sigma) F - a(2 - aH) M, \\ \bar{G} = (1 - a^2 \Sigma) G - a(2 - aH) N. \end{cases}$$

Setzen wir

$$(2) \quad a = 2/H$$

in (1), so erhalten wir

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{E} = (1 - 4K/H^2) E, \\ \bar{F} = (1 - 4K/H^2) F, \\ \bar{G} = (1 - 4K/H^2) G. \end{cases}$$

Es besteht also die Proportion:

$$(4) \quad \bar{E} : \bar{F} : \bar{G} = E : F : G.$$

Wenn wir nun annehmen, dass beide Flächen \bar{F} und F Kreisflächen sind, so folgt

$$(5) \quad \bar{E} : \bar{F} : \bar{G} = E : F : G = (\theta_i \theta_i) : (\theta_i \theta_i) : (\theta_i \theta_i),$$

wo

$$(6) \quad (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i \theta_i) dt d\tau + (\theta_i \theta_i) d\tau^2 = 0$$

Minimallinien auf F sind.⁽²⁾

Der Kosinus des Winkels α der zu $K = d\tau : dt$ und $k = d\tau : dt$ auf F gehörigen Fortschreitungsrichtungen ist:

$$(7) \quad \cos \alpha = \frac{(\theta_i \theta_i) + (\theta_i \theta_i)(K + k) + (\theta_i \theta_i) K k}{\sqrt{(\theta_i \theta_i) + 2(\theta_i \theta_i) K + (\theta_i \theta_i) K^2} \sqrt{(\theta_i \theta_i) + 2(\theta_i \theta_i) k + (\theta_i \theta_i) k^2}}.$$

(1) SCHEFFERS, G.: Einführung in die Theorie der Flächen, Berlin und Leipzig (1922), S. 302.

(2) NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. (1929) Vol. 2, p. 36.

(3)

Wir betrachten

$$(1) \quad (xx) = x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

(I) bezeichnet zwei parallele Geraden in R_2 , wo x_i homogene Koordinaten sind.

Als das skalare Produkt zweier Vektoren x und y bezeichnen wir hier die zu (1) gehörige Bilinearform

$$(2) \quad (\xi x) = \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 = 0$$

als skalares Quadrat eines Vektors x , der aber die Form (1) einnimmt.

$$(3) \quad I = \frac{(\xi x)^2}{(\xi \xi)(xx)} = \frac{(\xi_1 x_1 - \xi_2 x_2)^2}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)(x_1^2 - x_2^2)}$$

ist ein Invariant.

Wenn

$$(4) \quad I = 0,$$

so folgt

$$(5) \quad x_1/x_2 = \xi_2/\xi_1.$$

Wenn

$$(6) \quad I = 1,$$

so folgt

$$(7) \quad x_1/x_2 = \xi_1/\xi_2,$$

weil

$$(\xi_1 x_1 - \xi_2 x_2)^2 = (\xi_1^2 - \xi_2^2)(x_1^2 - x_2^2)$$

$$\text{d. h. } (8) \quad (\xi_1 x_1 - \xi_2 x_2)^2 = 0.$$

(5) oder (7) ist eine Beziehung zwischen zwei Geraden x und ξ .

Im allgemeinen besteht

$$(9) \quad I \geq 1,$$

weil

$$(10) \quad (\xi_1 x_1 - \xi_2 x_2)^2 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)(x_1^2 - x_2^2) = (x_1 \xi_2 - \xi_1 x_2)^2 \geq 0$$

ist, da x_i, ξ_i reelle sind.

Wir betrachten im folgenden einen unendlich fernen Punkt $P_\infty \xi_a$.

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(11) \quad (\xi^a \xi^b) = A^{ab},$$

so haben wir in A^{ab} ein Grössensystem, das sich nach

$$(12) \quad \xi^a = \sum_{\beta=1}^{11} c_\beta^a \xi \quad [a = I, II]$$

in folgender Weise substituiert:

$$(13) \quad \overset{*}{A}^{ab} = c_\beta^a c_\beta^b A^{ab}, \quad [\overset{*}{A}^{ab} = (\overset{*}{\xi}^a \overset{*}{\xi}^b)].$$

Von zu unserm Punkt P_∞ gehörigen Tensor A^{ab} gilt nach (12) $A^{ab} = \overset{*}{A}^{ab}$ und dass sich ferner die Determinante $A = |A^{ab}|$ nach

$$(14) \quad A^* = |c_\beta^a|^2 \cdot A$$

substituiert. Wollen wir nun einen eigentlichen reellen P_∞ haben, so müssen wir $A < 0$ setzen, d. h.

$$(15) \quad (\xi^I \xi^I)(\xi^{II} \xi^{II}) - (\xi^I \xi^{II})^2 < 0,$$

weil wir aus (15) haben

$$(16) \quad -(x_1^I x_1^{II} - x_1^I x_1^{II})^2 < 0.$$

Für $A = 0$ besteht

$$(17) \quad x_1^I / x_2^I = x_1^{II} / x_2^{II}.$$

Für $A > 0$ ist er imaginär.

Jetzt kann man untersuchen wie in meiner Arbeit.⁽¹⁾

(4)

Wir betrachten nun die Kugel ξ im R_N .

$$(1) \quad \xi^a = \xi^a(u), \quad a = I, III, \dots, n; \quad n < N; \quad u_1 \leq u \leq u_2,$$

bezeichnen Kreise in R_N , wo u Parameter ist.

(1) NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. II, p. 6,

Mit

$$(2) \quad t = \int_{u_1}^{u_2} F(x, \dot{x}) du$$

bezeichnen wir Kurvenlänge im Raume (1) und setzen (2) in

$$(3) \quad dt^2 = f_{\alpha\beta}(x, dx) dx^\alpha dx^\beta,$$

so ist die Länge l von kovariantem Vektor $\hat{\xi}$

$$(4) \quad l^2 = f_{\alpha\beta}(x, \eta) \hat{\xi}^\alpha \hat{\xi}^\beta,$$

wo η ein Vektor ist, der die gleiche Richtung wie dx hat.

Ist $\hat{\xi}, \hat{\eta}$ der Winkel zwischen $\hat{\xi}$ und η , so folgt

$$(5) \quad \cos \hat{\xi}\hat{\eta} = \frac{f_{\alpha\beta}(x, \eta) \hat{\xi}^\alpha \eta^\beta}{\sqrt{f_{\alpha\beta}(x, \eta) \hat{\xi}^\alpha \hat{\xi}^\beta} \sqrt{f_{\alpha\beta}(x, \eta) \eta^\alpha \eta^\beta}}.$$

In unserm Fall nimmt Christoffelsymbol den folgenden Wert an

$$(6) \quad \begin{cases} [a\beta, \mu] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial f_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right), \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = f^{\lambda\mu} [a\beta, \mu]. \end{cases}$$

(5)

Der Winkel φ eines Kreises x^α mit einer ihn schneidenden Kugel η wird durch

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = A_{\alpha\beta}(\eta x^\alpha)(\eta x^\beta)$$

gegeben.⁽¹⁾

Ist $x^\alpha = x^\alpha(t)$, so folgt

$$(2) \quad \cos^2 \varphi(t) = A_{\alpha\beta}(t) (\eta x^\alpha(t)) (\eta x^\beta(t)),$$

wo t ein Parameter ist.

Um Maximum-oder Minimumwert von φ zu finden, setzen wir

$$(3) \quad \partial/\partial t \{A_{\alpha\beta}(t) (\eta x^\alpha(t)) (\eta x^\beta(t))\} = 0.$$

Wenn

(1) BLASCHKE, W.: Differentialgeo. III (1929), S. 264.

$$\eta = \eta(t),$$

so folgt

$$(4) \quad \partial/\partial t \{A_{\alpha\beta}(\eta(t) \xi^\alpha)(\eta(t) \xi^\beta)\} = 0.$$

Aus (3) und (4) kann man φ vom Maximum-oder Minimumwerte finden.

(6)

In ROBINSONS Arbeit⁽¹⁾ haben wir

$$(1) \quad (\phi_v f_u - \phi_u f_v)^2 = E\phi_v^2 - 2F\phi_u\phi_v + G\phi_u^2.$$

Gleichfalls haben wir

$$(2) \quad (\phi_v F_u - \phi_u F_v)^2 = E\phi_v^2 - 2F\phi_u\phi_v + G\phi_u^2.$$

Aus (1), (2) ergibt sich

$$(3) \quad (\phi_v f_u - \phi_u f_v) : (\phi_v F_u - \phi_u F_v)^2 = (E\phi_v^2 - 2F\phi_u\phi_v + G\phi_u^2) : (E\phi_v^2 - 2F\phi_u\phi_v + G\phi_u^2),$$

wo ϕ , F von gleicher Bedeutung sind wie ϕ bzw. f in ROBINSONS Arbeit.

Es besteht :

$$(4) \quad (\phi_v f_u - \phi_u f_v)^2 : (\phi_v F_u - \phi_u F_v)^2 = \{(\theta_u \theta_u) \phi_v - 2(\theta_u \theta_v) \phi_u \phi_v + (\theta_v \theta_v) \phi_u^2\} : \{(\theta_u \theta_u) \phi_v^2 - 2(\theta_u \theta_v) \phi_u \phi_v + (\theta_v \theta_v) \phi_u^2\},$$

wenn unsere Fläche Kreisfläche ist.

(7)

Im folgenden mögen wir ROBINSONS Arbeit etwas modifizieren.
Betrachten wir

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2$$

wieder⁽²⁾ und setzen

-
- (1) ROBINSON, R.: A condition in invariant form for a net without detours, *Bulletin of the American Math. Society*, Vol. XLIII (1937), p. 102.
(2) NAKAJIMA, S: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, *Tohoku Math. Journ.* Vol. 34 (1931), p. 196.

$$(2) \quad (f_1 \rho_1 + f_2 \rho_2)^2 = \cos^2 \varphi$$

so bekommen wir aus (1)

$$(3) \quad (f_1 \rho_1 + f_2 \rho_2)^2 = T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2,$$

daraus ergibt sich

$$(4) \quad (T^{11} - f_1^2) \rho_1^2 + 2 (T^{12} - f_1 f_2) \rho_1 \rho_2 + (T^{22} - f_2^2) \rho_2^2 = 0.$$

Ist $\phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2$ eine Sorte von $f_1 \rho_1 + f_2 \rho_2$, so folgt

$$(5) \quad \begin{vmatrix} T^{11} - f_1^2 & 2(T^{12} - f_1 f_2) & T^{22} - f_2^2 \\ \phi_1 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & \phi_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{d. h. } (6) \quad (\phi_2 f_1 - \phi_1 f_2)^2 = T^{11} \phi_2^2 - 2 T^{12} \phi_1 \phi_2 + T^{22} \phi_1^2.$$

(6) ist unser Resultat.⁽¹⁾

N. B. Betrachten wir

$$ds^2 / R$$

anstatt ds^2 in ROBINSONS Arbeit, so folgt⁽²⁾

$$L du^2 + 2 M dudv + N dv^2,$$

$$J(f, \phi) = \pm D (\Delta_{\epsilon \phi})^{\frac{1}{2}} / \gamma_H$$

anstatt

$$E du^2 + 2 F dudv + G dv^2,$$

bzw.

$$J(f, \phi) = \pm D (\Delta_1 \phi)^{\frac{1}{2}}.$$

(8)

Im folgenden mögen wir die Kreisgeometrie in R_2 untersuchen.

Ist

(1) ROBINSON, R.: A condition in invariant form for a net without detours. Bulletin of the American Math. Society, Vol. XLIII (1937), p. 102.

(2) SCHEFFERS, G.: Einführung in die Theorie der Flächen (1922), S. 565.

Ist

$$(1) \quad f \equiv (\alpha \xi)^2 - (\alpha \alpha)(\xi \xi) \cos^2 \varphi_1 = 0,$$

so bildet ξ mit α einen festen Winkel, wo α, φ_1 Konstanten, ξ, α Kreise sind.

Ist

$$(2) \quad \varphi \equiv (\mathfrak{B} \xi)^2 - (\mathfrak{B} \mathfrak{B})(\xi \xi) \cos^2 \varphi_2 = 0,$$

so bildet ξ mit \mathfrak{B} einen festen Winkel, wo \mathfrak{B}, φ_2 Konstanten sind.

Aus (1), (2) folgt

$$\lambda (\alpha \xi)^2 + \mu (\mathfrak{B} \xi)^2 = 0,$$

$$\text{d. h.} \quad (3) \quad (\sqrt{\lambda} \alpha \pm i \sqrt{\mu} \mathfrak{B}, \xi) = 0,$$

wo

$$\lambda : \mu = (\mathfrak{B} \mathfrak{B}) \cos^2 \varphi_2 : -(\alpha \alpha) \cos^2 \varphi_1.$$

Aus (3) kann man wissen, dasz

$$\text{const. } f + \text{const. } \varphi = 0$$

die Kreisscharen, die zu den beiden Kreisen senkrecht sind, bedeutet.

(9)

Wenn $f(t, \tau)$ eine Funktion von t und τ ist, für die

$$(1) \quad (\theta_i \theta_i) f_\tau^2 - 2 (\theta_i \theta_\tau) f_i f_\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) f_i^2 = 0.$$

besteht, so stellt $f(t, \tau) = \text{const.}$ eine einfach unendliche Schar von Kurven auf der Kreisfläche dar, vorausgesetzt, dasz f nicht selbst bloss eine Konstante ist.

Die Fortschreitungsrichtungen $(d\tau : dt)$ längs der Kurven der Schar werden durch

$$(2) \quad f_i dt + f_\tau d\tau = 0$$

bestimmt. Da hiernach $f_i : f_\tau = -d\tau : dt$ ist, so folgt

$$(3) \quad (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2 (\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0,$$

d. h. dasz die Kurven $f = \text{const.}$ Minimallinien sind.

Der Schlusz ist umkehrbar, mithin folgt der

Satz: *Damit eine Kurvenschar $f(t, \tau) = \text{const.}$ auf einer Kreisfläche mit den Parametern t und τ eine der beiden Scharen von Minimallinien der Kreisfläche darstelle, ist notwendig und hinreichend, dass (1) besteht, während f selbst nicht bloß eine Konstante ist.*

Weiterhin wollen wir jetzt unter $f(t, \tau)$ und $g(t, \tau)$ zwei Funktionen von t und τ verstehen, die derart beschaffen seien, dass die Kurven $f(t, \tau) = \text{const.}$ und $g(t, \tau) = \text{const.}$ zusammen ein Orthogonalsystem auf der Kreisfläche definieren. Da die beiden Scharen die durch

$$(4) \quad d\tau : dt = -f_t : f_\tau \text{ bzw. } d\tau : dt = -g_t : g_\tau$$

bestimmten Fortschreitungsrichtungen haben, ist dann

$$(5) \quad (\theta_t \theta_\tau) f_\tau g_\tau - (\theta_t \theta_\tau) (f_\tau g_t + g_\tau f_t) + (\theta_\tau \theta_t) f_t g_t = 0.$$

Auch dieser Schlusz ist umkehrbar; man musz nur noch voraussetzen, dass keine der beiden Scharen $f = \text{const.}$ und $g = \text{const.}$ aus Minimalkurven bestehe.⁽¹⁾

Danach gilt der

Satz: *Zwei Kurvenscharen $f(t, \tau) = \text{const.}$ und $g(t, \tau) = \text{const.}$ auf einer Kreisfläche mit den Parametern t und τ bilden dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn*

$$(6) \quad \begin{cases} (\theta_t \theta_\tau) f_\tau g_\tau - (\theta_t \theta_\tau) (f_\tau g_t + g_\tau f_t) + (\theta_\tau \theta_t) f_t g_t \equiv 0, \\ (\theta_t \theta_\tau) f_\tau^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) f_\tau f_t + (\theta_\tau \theta_t) f_t^2 \equiv 0, \\ (\theta_t \theta_\tau) g_\tau^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) g_\tau g_t + (\theta_\tau \theta_t) g_t^2 \equiv 0. \end{cases}$$

Bildet man eine Kreisfläche Punkt für Punkt auf eine andere Kreisfläche ab, so sind

$$(7) \quad \begin{cases} (\theta_t \theta_\tau) + (\theta_t \theta_\tau) (K + k) + (\theta_\tau \theta_t) Kk = 0, \\ (\overline{\theta_t \theta_\tau}) + (\overline{\theta_t \theta_\tau}) (K + k) + (\overline{\theta_\tau \theta_t}) Kk = 0, \end{cases}$$

oder

(1) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, II (1922), S.461.

$$(8) \quad \begin{cases} K + k = \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) (\overline{\theta_i \theta_i}) - (\theta_i \theta_i) (\theta_\tau \theta_\tau)}{(\theta_i \theta_\tau) (\overline{\theta_\tau \theta_\tau}) - (\theta_\tau \theta_\tau) (\overline{\theta_i \theta_i})} , \\ Kk = \frac{(\theta_i \theta_i) (\overline{\theta_\tau \theta_\tau}) - (\theta_\tau \theta_\tau) (\overline{\theta_i \theta_i})}{(\theta_i \theta_\tau) (\overline{\theta_\tau \theta_\tau}) - (\theta_\tau \theta_\tau) (\overline{\theta_i \theta_i})} , \end{cases}$$

d. h. K und k sind Wurzeln der in K quadratischen Gleichung

$$(9) \quad \{(\theta_i \theta_i) (\overline{\theta_i \theta_\tau}) - (\theta_i \theta_\tau) (\overline{\theta_i \theta_i})\} - \{(\theta_\tau \theta_\tau) (\overline{\theta_i \theta_i}) - (\theta_i \theta_i) (\overline{\theta_\tau \theta_\tau})\} K + \{(\theta_i \theta_\tau) (\overline{\theta_\tau \theta_\tau}) - (\theta_\tau \theta_\tau) (\overline{\theta_i \theta_\tau})\} K^2 = 0,$$

so folgt

$$(10) \quad \{K + (\theta_i \theta_\tau) / (\theta_\tau \theta_\tau)\} \{k + (\theta_i \theta_\tau) / (\theta_\tau \theta_\tau)\} \\ = \{(\theta_\tau \theta_\tau)^2 Kk + (\theta_i \theta_\tau) (\theta_\tau \theta_\tau) (K + k) + (\theta_i \theta_\tau)^2\} : (\theta_\tau \theta_\tau)^2,$$

d. h.

$$(11) \quad \left\{ K + \frac{(\theta_i \theta_\tau)}{(\theta_\tau \theta_\tau)} \right\} \left\{ k + \frac{(\theta_i \theta_\tau)}{(\theta_\tau \theta_\tau)} \right\} = - \frac{(\theta_i \theta_\tau) (\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}{(\theta_\tau \theta_\tau)^2}.$$

Wäre $K = k$, so stände hier im reellen Falle links ein Quadrat, also eine positive Grösze, während die rechte Seite negativ ist, weil $(\theta_i \theta_i) (\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2$ im reellen Falle einen positiven Wert hat.

Wir kommen also zu einem Widerspruche.⁽⁸⁾

(10)

Wir können die folgenden Sätze beweisen.

Satz 1: *Damit sich die Pardmeterlinien (u) und eine Kreisfläche so anordnen lassen, dass sie ein Netz von unendlich kleinen Rhomben bilden, ist notwendig und hinreichend, dass das Verhältnis der beiden Fundamentalgrößen $(\theta_u \theta_u)$ und $(\theta_v \theta_v)$ gleich dem Verhältnisse einer von Null verschiedenen Funktion von u allein zu einer von Null verschiedenen Funktion von v allein sei.⁽¹⁾*

(2) I. c. (1), S. 109.

(1) SCHEFFERS, G.: Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie, II, S. 69.

Satz 2: *Dafür, dass sich die Parameterlinien (\bar{u}) und (\bar{v}) einer Kreisfläche zu einem Isothermennetze anordnen lassen, in dem (\bar{u}) bzw. (\bar{v}) von Kurve zu Kurve um dieselbe unendlich kleine Grösze wächst, ist notwendig und hinreichend, dass die zugehörigen Fundamentalgrössen $(\overline{\theta_u \theta_u})$, $(\overline{\theta_u \theta_v})$, $(\overline{\theta_v \theta_v})$ die Bedingungen*

$$(\theta_u \theta_u) = (\theta_v \theta_v), \quad (\theta_u \theta_v) = 0$$

erfüllen.⁽³⁾

BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXII)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, January 13, 1938)

Im folgenden mögen wir einige Sätze über Kreise und Kugeln mitteilen.

(1)

Im folgenden teilen wir inverse Geometrie in R_2 mit.

Ist ξ ein Kreis und \mathfrak{z} ein auf ihn nicht zusammenfallender Kreis, so ist

$$(1) \quad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z}\xi)\xi - \mathfrak{z}$$

der zu \mathfrak{z} in bezug auf den Kreis inverse Kreis.

Zwei Kreise \mathfrak{z} und \mathfrak{y} bestimmen einen Kreisbüschel, dessen ∞^1 Kreise ζ gegeben sind durch

$$(2) \quad \begin{cases} \zeta = a\mathfrak{z} + \beta\mathfrak{y} \\ \quad = a\mathfrak{z} + 2\beta(\mathfrak{z}\xi)\xi - \beta\mathfrak{z} \\ \quad = (a - \beta)\mathfrak{z} + 2\beta(\mathfrak{z}\xi)\xi, \end{cases}$$

wo a und β irgendwelche skalare Zahlen sind.

Aus (2) folgt

$$(3) \quad (\zeta\xi) = (a - \beta)(\xi\mathfrak{z}) + 2\beta(\mathfrak{z}\xi) = (\xi\mathfrak{z})(a + \beta).$$

Aus (3) kann man setzen

$$(4) \quad \{\cos \phi / \cos \varphi\} = a + \beta,$$

wo ϕ der Winkel zwischen ζ und $\hat{\zeta}$, φ der Winkel zwischen $\hat{\zeta}$ und \mathfrak{z} ist.

Wenn insbesondere $\alpha + \beta = 1$ gilt, so entsteht

$$(5) \quad \cos \phi = \cos \varphi.$$

Weiter betrachten wir

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{p} = \gamma \zeta + \partial \hat{\zeta} = \gamma \alpha \mathfrak{z} + \gamma \beta \mathfrak{y} + \partial \hat{\zeta} \\ = \{ \alpha \gamma - \gamma \beta \} \mathfrak{z} + \{ 2\beta \gamma (\mathfrak{z} \hat{\zeta}) + \partial \} \hat{\zeta}, \end{cases}$$

wo γ und ∂ skalare Zahlen sind.

Aus (6) folgt

$$(7) \quad \begin{cases} (\mathfrak{p} \mathfrak{y}) = 2 \{ \alpha \gamma - \gamma \beta \} (\mathfrak{z} \hat{\zeta}) (\mathfrak{z} \hat{\zeta}) + 2 \{ 2\beta \gamma (\mathfrak{z} \hat{\zeta}) + \partial \} (\mathfrak{z} \hat{\zeta}) \\ - \{ \alpha \gamma - \gamma \beta \} - \{ 2\beta \gamma (\mathfrak{z} \hat{\zeta}) + \partial \} (\hat{\zeta} \mathfrak{z}) \\ = 2\alpha \gamma (\mathfrak{z} \hat{\zeta}) (\mathfrak{z} \hat{\zeta}) + \partial (\mathfrak{z} \hat{\zeta}) - \{ \alpha - \beta \} \gamma, \end{cases}$$

$$\text{d. h. } (8) \quad \cos \lambda = 2\alpha \gamma \cos^2 \mu + \partial \cos \mu - \{ \alpha - \beta \} \gamma,$$

wo λ der Winkel zwischen \mathfrak{p} und \mathfrak{y} , μ der Winkel zwischen \mathfrak{z} und $\hat{\zeta}$ ist.

Ist

$$(9) \quad \alpha \mathfrak{x}^I + \beta \mathfrak{x}^{II}$$

ein Kreis und \mathfrak{x}^I ein auf ihn nicht zusammenfallender Kreis, so ist

$$(10) \quad \mathfrak{x}^{II} = (\mathfrak{x}^I, \alpha \mathfrak{x}^I + \beta \mathfrak{x}^{II}) \{ \alpha \mathfrak{x}^I + \beta \mathfrak{x}^{II} \} - \mathfrak{x}^I$$

der zu \mathfrak{x}^I in bezug auf den Kreis inverse Kreis.

Aus (10) ergibt sich

$$(11) \quad (\mathfrak{x}^I \mathfrak{x}^{II}) = \{ \alpha + \beta (\mathfrak{x}^I \mathfrak{x}^{II}) \} \{ \alpha + \beta (\mathfrak{x}^I \mathfrak{x}^{II}) \} - 1,$$

woraus folgt:

$$(12) \quad (\mathfrak{x}^I \mathfrak{x}^{II}) = \frac{1 - \alpha \beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\alpha\beta + 1}}{2\beta^2}.$$

Weiter kann man wissen, dass

$$(13) \quad \mathfrak{x} = (\alpha \mathfrak{x} + \beta \mathfrak{y}, \mathfrak{y}) \mathfrak{y} - \{ \alpha \mathfrak{x} + \beta \mathfrak{y} \}$$

anstatt (1) unmöglich ist, denn aus (13) folgt

$$(14) \quad a(xy) = (a+1)(xy).$$

(2)

(A) Musz die Kreisfläche die konstante Krümmung k haben, so kann man setzen

$$(1) \quad \begin{cases} \sqrt{E} = \sqrt{(\theta_i \theta_i)} = V_1(t) \cos \sqrt{k} \tau + V_2(t) \sin \sqrt{k} \tau, \\ F = (\theta_i \theta_i) = 0, \quad G = (\theta_\tau \theta_\tau) = 1, \end{cases}$$

wo E, F, G die Fundamentalgrößen erster Ordnung im gewöhnlichen Sinne und $(\theta_i \theta_i)$, $(\theta_i \theta_\tau)$, $(\theta_\tau \theta_\tau)$ unsere Fundamentalgrößen in der Kreisfläche sind.

Deshalb gilt der

Satz: Die Minimallinie einer Kreisfläche hat die Darstellung

$$\{V_1(t) \cos \sqrt{k} \tau + V_2(t) \sin \sqrt{k} \tau\}^2 d\tau^2 + dt^2 = 0.$$

(B) Wir betrachten die Kugel als Kreisfläche. Man kann setzen

$$(1) \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1, \quad (\theta_i \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_i \theta_i) = \cos^2 \tau.$$

Die Differentialgleichungen der Minimallinien sind

$$(2) \quad d\tau \pm i \cos \tau \cdot dt = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch schreiben:

$$(3) \quad e^{i t} \tan\left(\frac{1}{2} \tau + \frac{1}{4} \pi\right) = \text{const.},$$

wo t, τ unsere Parameter auf der Kreisfläche und

$$(4) \quad (\theta_i \theta_i), \quad (\theta_i \theta_\tau), \quad (\theta_\tau \theta_\tau)$$

unsere Fundamentalgrößen der Kreisfläche sind.⁽¹⁾

(C) Die gewonnene imaginäre Minimalkreisfläche⁽²⁾ dritter Ordnung als Schiebungskreisfläche von Minimalkurven zu konstruieren denken wir⁽³⁾

(1) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 512.

(2) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 77.

(3) SCHEFFERS, G., „a. a. O. S. 313.

$$(1) \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1, \quad (\theta_i \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_i \theta_i) = 1 - 2\tau$$

und

$$(2) \quad (1 - 2\tau) dt^2 + d\tau^2 = 0,$$

die die Differentialgleichung der Minimalkurven ist.

Da sich die Gleichung in

$$(3) \quad dt + \frac{d\tau}{\sqrt{2\tau-1}} = 0 \quad \text{und} \quad dt - \frac{d\tau}{\sqrt{2\tau-1}} = 0$$

zerlegen lässt, sind längs der Minimalkurven der einen Schar und der anderen

$$(4) \quad t + \sqrt{2\tau-1} = \text{const.} \quad \text{und} \quad t - \sqrt{2\tau-1} = \text{const.}$$

Um die Minimalkurven als Parameterlinien einzuführen, nehmen wir deshalb die neuen Parameter

$$(5) \quad \bar{t} = \frac{1}{2}(t + \sqrt{2\tau-1}), \quad \bar{\tau} = \frac{1}{2}(t - \sqrt{2\tau-1})$$

an, d. h. müssen wir setzen:

$$(6) \quad t = \bar{t} + \bar{\tau}, \quad \tau = \frac{1}{2} + (\bar{t} - \bar{\tau})^2.$$

(D) Betrachten wir das Bogenelement

$$(1) \quad ds^2 = \lambda \{ (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 \}$$

auf der Kreisfläche K, das wir durch die Einführung neuer Parameter p, q in die sogenannte isotherme Form

$$(2) \quad ds^2 = k(p, q)(dp^2 + dq^2)$$

verwandeln kann, so entsteht

$$(3) \quad \{(\theta_i \theta_i) p_\tau - (\theta_i \theta_\tau) p_i\} + \{(\theta_\tau \theta_\tau) p_i - (\theta_i \theta_\tau) p_\tau\} q_\tau = 0,$$

woraus wir erhalten:

$$(4) \quad \begin{cases} q_i = -\mu \{(\theta_i \theta_i) p_\tau - (\theta_i \theta_\tau) p_i\}, \\ q_\tau = +\mu \{(\theta_\tau \theta_\tau) p_i - (\theta_i \theta_\tau) p_\tau\}. \end{cases}$$

Somit haben wir

$$(5) \quad \begin{cases} q_t = - \frac{(\theta_t \theta_t) p_\tau - (\theta_t \theta_\tau) p_t}{W}, \\ q_\tau = \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) p_t - (\theta_\tau \theta_t) p_\tau}{W}, \quad W^2 = (\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2, \end{cases}$$

und umgekehrt

$$(6) \quad \begin{cases} p_t = \frac{(\theta_t \theta_t) q_\tau - (\theta_t \theta_\tau) q_t}{W}, \\ p_\tau = - \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) q_t - (\theta_\tau \theta_t) q_\tau}{W}. \end{cases}$$

Ist das System t, τ isotherm, so vereinfachen sich unsere Formeln zu

$$(7) \quad p_t = q_\tau, \quad p_\tau = -q_t$$

wenn man $W > 0$ nimmt.

Diese Gleichung ist das System der Differentialgleichungen von CAUCHY und RIEMANN aus der Funktionentheorie.

Ist eine Lösung p von $\Delta p = 0$ bekannt, so bekommt man q durch

$$(8) \quad q = \int - \frac{\{(\theta_t \theta_t) p_\tau - (\theta_t \theta_\tau) p_t\} dt + \{(\theta_\tau \theta_\tau) p_t - (\theta_\tau \theta_t) p_\tau\} d\tau}{W}.$$

$$(9) \quad \left\{ \frac{(\theta_t \theta_t) p_\tau - (\theta_t \theta_\tau) p_t}{W} \right\}_\tau + \left\{ \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) p_t - (\theta_\tau \theta_t) p_\tau}{W} \right\}_t = 0$$

bedeutet, dass mit dem Ausdruck unterm Integralzeichen in (8) ein vollständiges Differential gemeint ist.

$$(10) \quad z = p + iq$$

bezeichnet man als eine komplexe analytische Funktion auf unserer Kreisfläche. Somit ist z

$$(11) \quad \begin{cases} dw = f'(z) dz, \\ |dw| = |f'(z)| ds / \sqrt{k}, \end{cases}$$

also

$$(12) \quad ds^2 = \lambda / |f'(z)|^2, \quad (dt^2 + d\tau^2).$$

Das Bogenelement hat wieder die isotherme Form

$$(13) \quad dz = dp + idq = 0$$

oder

$$(14) \quad z = \text{const.}$$

Wegen

$$(15) \quad ds^2 = (dp + idq)(dp - idq) = 0$$

auf unserer Kreisfläche K wird eine Schar von imaginären Kurven mit der Länge Null⁽¹⁾ geliefert.

(E) Besteht

$$(1) \quad \begin{cases} (\theta_i, \theta_i) = \{n_i^2 + \bar{n}_i^2 : n_i^2 + \bar{n}_i^2\}, \\ (\theta_i, \theta_\tau) = \{n_i n_\tau + \bar{n}_i \bar{n}_\tau : n_i^2 + \bar{n}_i^2\}, \\ (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1 \end{cases}$$

auf Kreisfläche, so kann man dadurch bei gegebenem Bogenelement einer Kreisfläche die vier Größen n_i, \bar{n}_i bis auf eine Substitution

$$(2) \quad \begin{cases} n_i^* = \cos \omega \cdot n_i - \sin \omega \cdot \bar{n}_i, \\ \bar{n}_i^* = \pm \sin \omega \cdot n_i \pm \cos \omega \cdot \bar{n}_i \end{cases}$$

bestimmen, wobei ω eine beliebige Funktion von t und τ ist.

Man kann betrachten

$$ds_1 = \sum_i n_i du^i \quad \text{und} \quad ds_2 = \sum_i \bar{n}_i du^i$$

als Bogenelement der Kurven eines senkrechten Netzes auf der Kreisfläche.⁽²⁾

(F) Ist nämlich φ der Winkel, den eine beliebige Fortschreitungsrichtung $dt : d\tau$ mit der Krümmungslinie $\tau = \text{const.}$ auf Kreisfläche einschlieszt, so ist

$$(1) \quad (\theta_i, \theta_\tau) = 0,$$

also ergibt sich

(1) Vergl. BLASCHKE, W.: Differentialgeo. I, Dritte Auflage, S. 173.

(2) BLASCHKE, W.: Differentialgeo, Dritte Auflage, S. 194.

$$(2) \quad \tan \varphi = - \frac{d\tau}{\sqrt{(\theta_t, \theta_t)} dt}$$

oder,

$$(3) \quad \begin{cases} dt = \lambda \cos \varphi, \\ d\tau = \lambda \sqrt{(\theta_t, \theta_t)} \sin \varphi. \end{cases}$$

wenn λ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet.⁽¹⁾

(G) Aus meiner Arbeit⁽²⁾ kann man den folgenden Satz beweisen.

Satz: *Dann und nur dann, wenn die beiden Scharen von Parameterlinien auf einer Kreisfläche ein Orthogonalsystem bilden und die eine Schar aus geodätischen Kurven besteht, gelten zugehörige Parameter t und τ derart, dass das Quadrat des Bogenelements die Form*

$$(1) \quad ds^2 = d\tau^2 + (\theta_t, \theta_t) dt^2$$

annimmt, also $(\theta_\tau, \theta_\tau) = 1$ und $(\theta_t, \theta_\tau) = 0$ wird. Alsdann ist τ die Bogenlänge der geodätischen Parameterlinien (t), von der Parameterlinie ($\tau = 0$) an bis zur Parameterlinie (τ) gerechnet.⁽³⁾

Man nennt solche Parameter t und τ der Kreisfläche, mittels derer das Quadrat des Bogenelements die charakteristische Form (1) bekommt, geodätische Parameter, obwohl nur die Parameterlinien (t) im allgemeinen wohlbemerkt geodätische Parameter sind und aber die Parameterlinien (τ) es nicht.

Wegen $(\theta_\tau, \theta_\tau) = 1$ und $(\theta_t, \theta_\tau) = 0$ wird

$$(2) \quad D^2 \equiv (\theta_t, \theta_t)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_t, \theta_\tau)^2 = (\theta_t, \theta_t).$$

Wir machen $D = \sqrt{(\theta_t, \theta_t)}$ dadurch eindeutig, dass wir von den beiden Werten dieser Quadratwurzel an einer bestimmten Stelle einen auswählen.

Insbesondere können wir im reellen Falle D positive annehmen. Die von einem Punkte (t, τ) ausgehenden Kurven (t) und (τ) haben nur in diesem Punkte zueinander senkrechte Tangenten. Die Dif-

(1) Vergl. KOMMERELL: Raumkurven und Flächen, II Band, S. 27.

(2) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. II, S. 36.

(3) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen (1922), S. 505.

ferentialgleichung aller geodätischen Kurven der Kreisfläche nimmt die Form an:

$$(3) \quad (\theta_i \theta_i) (\tau' t'' - t' \tau'') + \{ (\theta_i \theta_i)_\tau \tau'^2 + \frac{1}{2} (\theta_i \theta_i)_i \tau' t' + \frac{1}{2} (\theta_i \theta_i) (\theta_i \theta_i)_\tau t'^2 \} t' = 0.$$

Dabei sind t und τ als Funktionen eines dritten Parameters u zu betrachten.

(H) Wir betrachten eine Kreisfläche, auf denen die Kurvenscharen

$$(1) \quad f(t, \tau) = \text{const.}$$

liegen. Aus (1) folgt

$$(2) \quad f_t + f_\tau \frac{d\tau}{dt} = 0,$$

daraus ergibt sich

$$(3) \quad d\tau/dt = -f_t : f_\tau.$$

Anderseits haben wir

$$(4) \quad \frac{df}{ds} = \frac{\sqrt{\lambda} \{ f_t dt + f_\tau d\tau \}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)_t dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2}},$$

wo ds das Bogenelement und $(\theta_i \theta_i)$, $(\theta_i \theta_\tau)$, $(\theta_\tau \theta_\tau)$ die Fundamentalgrößen unserer Fläche sind.

Aus (3), (4) folgt

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta_{ff}}} \frac{d\tau}{ds} \left(= \frac{1}{\sqrt{\Delta_{ff}}} \frac{df}{ds} \frac{d\tau}{dt} \right) = - \frac{f_t}{f_\tau} \frac{f_t dt + f_\tau d\tau}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)_t dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2}} \times \frac{\{ (\theta_i \theta_i) (\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2 \}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i) f_\tau^2 - 2(\theta_i \theta_\tau) f_t f_\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) f_t^2}},$$

wo Δ_{ff} im Scheffersschen Buch⁽¹⁾ steht.

Aus (5) kann man wissen, dass $1/\sqrt{\Delta_{ff}} d\tau/ds$ mit $(\theta_i \theta_i)$, $(\theta_i \theta_\tau)$, $(\theta_\tau \theta_\tau)$ zu bezeichnen ist.

(I) Wir betrachten eine Rotationskreisfläche. Es besteht

$$(1) \quad (\theta, \theta_t) = p, \quad (\theta, \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1.$$

Für Nabelpunkte folgt⁽¹⁾

$$\{(\theta, \theta_t) \cdot \partial^2 / \partial \tau^2 \cdot (\theta, \theta_t)\} + \{\partial / \partial \tau \cdot (\theta, \theta_t)\}^2 = 0.$$

(J) Betrachten wir die Kreisfläche

$$(1) \quad \chi(t, \tau) = f(t) + \phi(\tau),$$

so kann man setzen

$$(2) \quad (\theta, \theta_\tau) = 1, \quad (\theta_t, \theta_\tau) = \sum f' \phi', \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1,$$

wo (θ, θ_t) , (θ, θ_τ) und $(\theta_\tau, \theta_\tau)$ unsere Fundamentalgrößen von (1) sind.

Dabei bedeuten t, τ die Kurvenlänge längs der Kurven $f(t)$ bzw. $\phi(\tau)$.

(K) Man kann § 7 in HURWITZ-COURANTS Buch⁽²⁾ bei der Kreisfläche untersuchen. In diesem Falle verändern sich (8) und (9) nach

$$(8') \quad \begin{cases} u_t = \frac{(\theta, \theta_t) v_\tau - (\theta_t, \theta_\tau) v_t}{w}, & v_t = \frac{-((\theta, \theta_t) u_\tau + (\theta_t, \theta_\tau) u_t)}{w}, \\ u_\tau = \frac{(\theta, \theta_\tau) v_t - (\theta_\tau, \theta_t) v_\tau}{w}, & v_\tau = \frac{-(\theta, \theta_\tau) u_\tau + (\theta_\tau, \theta_t) u_t}{w}, \\ w^2 = (\theta, \theta_t)(\theta_t, \theta_\tau) - (\theta_t, \theta_\tau)^2, \end{cases}$$

und

$$(9') \quad \Delta w = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{(\theta_\tau, \theta_\tau) w_t - (\theta_t, \theta_\tau) w_\tau}{w} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{(\theta, \theta_t) w_\tau - (\theta_t, \theta_\tau) w_t}{w} \right\}.$$

(3)

(A) Sollen der Kreis ξ^a und die Kugel η zueinander senkrecht stehen, so muss

$$(1) \quad A_{ab}(\xi^a \eta)(\xi^b \eta) = 0,$$

(1) Vergl. SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 126.

(2) HURWITZ-COURANT: Funktionentheorie (1925), S. 486.

sein,⁽¹⁾ wo

$$(\xi^a \xi^b) = A^{ab}, \quad A^{ab} A_{br} = \begin{cases} 1 & \text{für } a = r \\ 0 & \text{,, } r \neq a \end{cases}$$

sind.

Sollen der Kreis ξ^a und die Kugel β gleichfalls zueinander senkrecht stehen, so muss

$$(2) \quad A_{a\beta} (\xi^a \beta) (\xi^a \beta) = 0$$

sein.

Wenn

$$(3) \quad \alpha\beta + \beta\beta = w$$

besteht, so folgt

$$(4) \quad A_{a\beta} (\xi^a w) (\xi^a w) = 0.$$

Deshalb gilt der

Satz: *Steht der Kreis ξ^a zu beiden Kugeln η und β senkrecht, so steht ξ^a auch zur Kugel η senkrecht, wo η durch ξ^a hingeht.*

Für den Winkel φ zwischen dem Kreis ξ^a und der Kugel η erhalten wir

$$\cos^2 \varphi = (\xi^a \eta) (\xi^a \eta)$$

oder

$$\cos^2 \varphi = A_{a\beta} (\xi^a \eta) (\xi^a \eta),$$

daraus ergibt sich

$$\sin^2 \varphi = 1 - A_{a\beta} (\xi^a \eta) (\xi^a \eta),$$

$$\tan^2 \varphi = \left\{ \frac{A_{a\beta} (\xi^a \eta) (\xi^a \eta)}{1 - A_{a\beta} (\xi^a \eta) (\xi^a \eta)} \right\}^{-1},$$

$$\cot^2 \varphi = \frac{A_{a\beta} (\xi^a \eta) (\xi^a \eta)}{1 - A_{a\beta} (\xi^a \eta) (\xi^a \eta)},$$

$$\sec^2 \varphi = \frac{1}{A_{a\beta} (\xi^a \eta) (\xi^a \eta)},$$

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (I), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. V (1932), p. 119.

$$\operatorname{cosec}^2 \varphi = \frac{1}{1 - A_{\alpha\beta}(\xi^a \eta)(\xi^a \eta)}.$$

(B) Es seien ξ und η zwei Kreise in R_2 , so bezeichnen

$$(1) \quad \alpha\xi + \beta\eta$$

einen Kreisbüschel, der durch den Schnittpunkt von ξ und η geht, wo α und β zwei skalare Grössen sind.

Ist (1) zu ξ senkrecht, folgt

$$(2) \quad \alpha(\xi\xi) + \beta(\xi\eta) = 0,$$

$$\text{d. h.} \quad \alpha = 0,$$

wo ξ und η zueinander senkrecht sind.

Deshalb gilt der

Satz: *Es seien zwei Kreise ξ und η in R_2 zueinander senkrecht, so ist η nur ein Kreis, der durch den Schnittpunkt von ξ und η geht.*

(C) Wir betrachten

$$(1) \quad \zeta = \cos \alpha \cdot \xi + \sin \alpha \cdot \eta,$$

wo ξ , η zwei senkrechte Kugeln in R_3 und α Parameter ist.

Aus (1) kann man wissen, dass ζ die Kugel in R_3 bezeichnet.

Weiter besteht

$$(2) \quad \zeta = (\zeta\xi) \cdot \xi + (\zeta\eta) \cdot \eta,$$

denn

$$(3) \quad (\zeta\eta) = \sin \alpha, \quad (\zeta\xi) = \cos \alpha.$$

Wenn insbesondere $\eta \equiv \xi'$ ist, so folgt

$$(4) \quad \zeta = (\zeta\eta) \cdot \xi + (\xi\xi') \cdot \eta.$$

Ist $\eta \equiv \xi'$, so folgt

$$(5) \quad \zeta = (\zeta \cdot \xi) \xi.$$

(D) Wir betrachten k als einen festen Kreis in R_2 , φ_0 als einen festen Winkel, so bezeichnet ξ die Kreisschar R_2 , die mit k den Winkel φ_0 bildet, wo

$$(1) \quad (k\bar{x})^2 - (kk)(x\bar{x}) \cos^2 \varphi_0 = 0.$$

$$(2) \quad x = \alpha y + \beta z$$

bezeichnet die Kreisscharen in R_2 , wo y und z zwei Kreise in R_2 , α und β zwei skalare Größen bedeuten.

Setzen wir (2) in (1) ein, so entsteht

$$(3) \quad \{\alpha(ky) + \beta(kz)\}^2 - (kk) \{\alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta(yz) + \beta^2 z^2\} \cos^2 \varphi_0 = 0.$$

Sind y und z zueinander senkrecht, so folgt aus (3)

$$(4) \quad \{\alpha(ky) + \beta(kz)\}^2 - (kk) \{\alpha^2 + \beta^2\} \cos^2 \varphi_0 = 0,$$

daraus ist zu erhalten

$$(5) \quad \alpha(ky) + \beta(kz) = \text{const.}$$

Somit ergibt sich

$$(6) \quad \alpha \cos \phi + \beta \cos \varphi = \text{const.},$$

wo ϕ der Winkel zwischen k und y , φ der Winkel zwischen k und z ist.

Ist y ein Punkt, so folgt

$$(x\bar{x}) = 0,$$

somit ergibt sich aus (1) $(k\bar{x}) = 0$, d. h. x liegt auf k .

(E) Wir betrachten

$$(1) \quad z = y + iv,$$

$$(2) \quad \bar{z} = y - iv,$$

so bezeichnen z und \bar{z} zwei Kreise in R_2 , denn $(zz) = 1$, $(\bar{z}\bar{z}) = 1$ ist, wo y ein Kreis in R_2 , v ein Punkt auf y in R_2 ist.

Weiter kann man wissen, dass

$$(3) \quad (z\bar{v}) = 0,$$

$$(4) \quad (\bar{z}v) = 0,$$

ist.

Somit liegt v auf z und \bar{z} .

Aus (1), (2) ergibt sich

$$(5) \quad (\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}) = 1,$$

$$(6) \quad (\bar{\mathfrak{z}}\mathfrak{v}) = 1,$$

$$(7) \quad (\bar{\mathfrak{z}}\mathfrak{v}) = 1,$$

so kann man wissen, dass \mathfrak{v} , \mathfrak{z} und $\bar{\mathfrak{z}}$, und \mathfrak{z} , $\bar{\mathfrak{z}}$ einander berühren.

Nehmen wir einen Kreis \mathfrak{x} , der \mathfrak{z} berührt, so entsteht

$$(8) \quad (\mathfrak{z}\mathfrak{x}) = 1,$$

daraus folgt

$$(9) \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{v}) + i(\mathfrak{x}\mathfrak{v}) = 1.$$

Für

$$(10) \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{v}) = 1, \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{v}) = 0$$

wird (9) erfüllt, daraus kann man wissen, dass \mathfrak{x} , \mathfrak{v} berührt und \mathfrak{v} auf \mathfrak{x} liegt.

Setzen wir ε , die die duale Zahl ist, anstatt i in (1) und (2), so kann man dasselbe Resultat wie oben nehmen.

(F) Setzen wir

$$(1) \quad \mathfrak{v}(\sigma) = \mathfrak{x}(\sigma) + i\mathfrak{x}'(\sigma), \quad i = \sqrt{-1},$$

so folgt

$$(2) \quad (\mathfrak{v}\mathfrak{v}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + 2i(\mathfrak{x}\mathfrak{x}') - (\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'),$$

wo \mathfrak{x} der Kreis in R_2 , $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}') = 1$ und $d\mathfrak{x}/d\sigma = \mathfrak{x}'$ ist.⁽¹⁾

Aus (2) kann man wissen, dass $\mathfrak{v}(\sigma)$ eine Kurve in R_2 bezeichnet, wo σ ein Parameter ist.

Weiter kann man mit

$$(3) \quad \bar{\mathfrak{v}}(\sigma) = \mathfrak{x}(\sigma) - i\mathfrak{x}'(\sigma)$$

eine Kurve in R_2 bezeichnen.

Aus (1), (3) entsteht

$$(4) \quad \mathfrak{v}\bar{\mathfrak{v}} = 2.$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV, S. 126.

Aus (4) kann man wissen, dass

$$(5) \quad \cos \phi \neq 0$$

besteht, wo ϕ der Winkel zwischen η und $\bar{\eta}$ ist.

(G) Durch

$$(1) \quad \mathfrak{A} = \alpha p + \beta a$$

sind alle Kreise, die durch den Schnittpunkte von zwei Kreisen p, q in R_2 hingehen, dargestellt, wo α, β zwei skalare Größen sind.

Von

$$(2) \quad a = \gamma v + \delta w$$

gilt das gleiche, wo γ, δ zwei skalare Größen, v, w zwei Kreise in R_2 sind.

Sind \mathfrak{A} und a immer zueinander senkrecht, so gilt

$$(3) \quad \alpha\gamma(pv) + \gamma\beta(qv) + \alpha\delta(pw) + \beta\delta(qw) = 0$$

identisch in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, daraus ergibt sich

$$(4) \quad \begin{cases} (pv) = 0, \\ (qv) = 0, \\ (pw) = 0, \\ (qw) = 0. \end{cases}$$

(4) bezeichnet, dass $p, v; q, v; p, w; q, w$ zueinander senkrecht sind.

(H) Ist \mathfrak{R} im Kreis in R_2 , so kann man setzen

$$(1) \quad (\mathfrak{R}\mathfrak{R}) = 1.$$

Ist \bar{x} ein Kreis in R_2 , der zu \mathfrak{R} senkrecht ist, so entsteht

$$(2) \quad (\bar{x}\mathfrak{R}) = 0.$$

Der Kreis \mathfrak{A} , der die beiden Schnittpunkte von \mathfrak{R} und \bar{x} hindurchgeht, ist gegeben durch

$$(3) \quad \mathfrak{A} = \alpha\mathfrak{R} + \beta\bar{x},$$

wo α, β die skalaren Gröszen sind. Ist \mathfrak{A} ein Punkt, so folgt

$$(4) \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = \alpha^2 = \beta^2 = 0,$$

so kann man setzen

$$(5) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}^I = \bar{x} + \sqrt{-1} \cdot x, \\ \mathfrak{A}^{II} = \bar{x} - \sqrt{-1} \cdot x, \end{cases}$$

d. h. zwei Punkte (5) gelten.

(I) Es seien x, y zwei Kreise in R_2 , so kann man wissen, dasz v in

$$(1) \quad v = x - (xy)y, \quad (xy)^2 = 1$$

der Berührungspunkt von x und y ist.

$$(2) \quad z = x + (xy)y, \quad (xy)^2 = 1$$

bezeichnet einen Kreis, der in v, x und y berührt, weil

$$(3) \quad (zx) = 2, \quad (zy) = \pm 2, \quad (vz) = 0$$

isi, wo der Winkel zwischen z und x dem Winkel zwischen z und y gleich ist.

Bei der Umnormierung von x, y, z kann man 2 in (3) mit 1 einsetzen.

(J) Nach THOMSENS Arbeit⁽¹⁾ kann man wissen, dasz

$$\xi(\sigma)$$

die Schmiegekugeln der Raumkurve

$$\xi(\sigma) + \xi''(\sigma)$$

sind.

Nun nehmen wir $\eta(\sigma)$ und $\eta(\sigma) + \eta''(\sigma)$ anstatt $\xi(\sigma)$ und $\xi(\sigma) + \xi''(\sigma)$ und setzen voraus, dasz ξ und η zueinander senkrecht, $\xi + \xi''$ und $\eta + \eta''$ zueinander senkrecht sind, so folgt

$$(1) \quad (\xi + \xi'', \eta + \eta'') = 0$$

und

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd., S. 139.

$$(2) \quad (\xi\eta) = 0.$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(3) \quad 2(\xi'\eta') = (\xi''\eta''),$$

wo σ das Parameter ist.

Somit folgt der

Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Raumkurven $\xi + \xi''$ und $\eta + \eta''$ zueinander senkrecht, ξ und η zueinander senkrecht sind, ist

$$2(\xi'\eta') = (\xi''\eta''),$$

wo ξ die Schmiegkugeln von $\xi + \xi''$, η die Schmiegkugeln von $\eta + \eta''$ sind.

Sind η bzw. ξ zu $\xi + \xi''$ und $\eta + \eta''$ senkrecht, so folgt

$$(\xi'\eta') = 0,$$

wo $(\xi\eta) = 0$.

N. B. Man kann $(\xi\eta) = 1$ anstatt $(\xi\eta) = 0$ einsetzen.

(K) Aus

$$(J)$$

kann man wissen, dass

$$\{\xi + \xi''\} + \{\eta + \eta'\} = \{\xi + \eta\} + \{\xi + \eta\}''$$

ist.

Hieraus folgt der

Satz: Die Schmiegkugeln der Mittelkurve von

$$\xi + \xi''$$

und

$$\eta + \eta''$$

sind nicht anders als die Mittelkugeln von

$$\xi$$

und

η .

Wenn ξ zu

$$\xi, \eta, \xi + \xi''$$

und

$$\eta + \eta''$$

senkrecht ist, so folgt

$$(\xi\xi') = 0, (\xi\eta'') = 0.$$

Wenn

$$\xi'' + \xi = \text{const.}$$

ist, so folgt

$$\xi = \text{const.} + A \cos \sigma + B \sin \sigma.$$

Daraus ergibt sich⁽¹⁾

$$(1) \quad \begin{cases} \text{const.} = a\zeta, \\ u' = -d\zeta, \\ \bar{u}' = -d\bar{\zeta}, \\ \zeta = -a \{-A \sin \sigma + B \cos \sigma\} + du + d\bar{u}, \end{cases}$$

wo A, B die Konstanten sind.

(1) ist Frenet-Formel in unserem Falle.

Mit

$$(2) \quad p = \xi'' + A\xi' + B\xi$$

kann man einen Punkt in R_3 bezeichnen, wo ξ die Kugel in R_3 und A, B die skalaren Größen sind.

Aus (2) folgt

$$(3) \quad \begin{cases} (p\xi) = -1 + B, \\ (p\xi') = A, \end{cases}$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd., S. 140.

daraus ergibt sich

$$(4) \quad p = \xi'' + (p\xi) \xi' + \{1 + (p\xi)\} \xi = \xi'' + \xi,$$

denn $(p\xi') = 0$, $(p\xi) = 0$ ist.

So kann man sagen, durch eine Kugel ξ und zwei konsekutive Kugeln von ξ könne man einen Punkt P, dessen Gleichung (4) ist, bestimmen.⁽¹⁾

(L) Wir wollen den folgenden Satz beweisen.

Satz: k_1, k_2, k_3 , deren Schmiegkugeln ξ, η, ζ in R_3 gegeben sind, seien drei Kurven. Sind

$$(1) \quad \xi = \alpha\eta + \beta\zeta,$$

so besteht

$$(2) \quad k_1 = \alpha k_2 + \beta k_3,$$

wo α, β die skalaren Gröößen sind.

Beweis: Aus (1) ergibt sich

$$(3) \quad \xi'' = \alpha\eta'' + \beta\zeta'.$$

Aus (1) und (3) folgt

$$\text{d. h.} \quad \{\xi + \xi'\} = \alpha \{\eta + \eta''\} + \beta \{\zeta + \zeta''\},$$

$$k_1 = \alpha k_2 + \beta k_3, \quad \text{w. z. b. w.}$$

(M) ξ, η seien zwei senkrechte Kugeln in R_3 , so bezeichnet

$$(1) \quad \eta(\sigma) = (\eta\xi) \xi(\sigma) + (\eta\eta) \eta(\sigma), \quad (\eta\xi)^2 + (\eta\eta)^2 = 1$$

die Kugeln, die durch die Schnittkurve von ξ, η gehen.

Mit k_1, k_2, k_3 bezeichnen wir drei Raumkurven, deren Schmiegkugeln η, ξ, η sind, so besteht

$$(2) \quad k_1 = (\eta\xi) k_2 + (\eta\eta) k_3.$$

$$(3) \quad \begin{cases} \eta = (\eta\xi_1) \xi_1 + (\eta\eta_1) \eta_1 \\ \eta = (\eta\xi_2) \xi_2 + (\eta\eta_2) \eta_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., IV Bd., S. 139.

zeigen, dass η durch den Schnittpunkt von

$$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$$

geht, wo

$$\eta, \xi_i, \eta_i$$

die Kreise in R_i sind.

Aus (3) entsteht

$$(4) \quad (\eta \xi_i) \xi_i + (\eta \eta_i) \eta_i = (\eta \xi_j) \xi_j + (\eta \eta_j) \eta_j.$$

Wenn (1) den Punkt η hindurch geht, so folgt

$$(5) \quad (\eta \xi) (\xi \eta) + (\eta \eta) (\eta \eta) = 0.$$

(5) ist die Bedingung dafür, dass zwei Schnittpunkte zwei senkrechter Kreise ξ, η und ein Punkt η auf einem Kreise liegen.

Gleichfalls ist

$$(\eta \xi) (\xi \eta) + (\eta \eta) (\eta \eta) = 0$$

die Bedingung dafür, dass ein Schnittpunkt zwei senkrechter Kugeln ξ, η und ein Punkt η auf einer Kugel liegen.

Wenn zwei senkrechte Kreise ξ_i, η_i in R_i gegeben sind, so werden zwei Kreisscharen η, ζ durch

$$(6) \quad \begin{cases} \eta = (\eta \xi_1) \xi_1 + (\eta \eta_1) \eta_1, \\ \zeta = (\zeta \xi_2) \xi_2 + (\zeta \eta_2) \eta_2 \end{cases}$$

bestimmt.

Sind (6) zueinander senkrecht, so folgt

$$(7) \quad (\eta \xi_1) (\zeta \xi_2) (\xi_1 \xi_2) + (\eta \eta_1) (\zeta \xi_2) (\eta_1 \xi_2) + (\eta \xi_1) (\zeta \eta_2) (\xi_1 \eta_2) + (\eta \eta_1) (\zeta \eta_2) (\eta_1 \eta_2) = 0.$$

Weiter bestimmen η, ζ eine Kreisschar

$$(8) \quad \mathfrak{G} = (\mathfrak{G} \eta) \eta + (\mathfrak{G} \zeta) \zeta,$$

wo (7) besteht.

Wenn ein Kreis α zu η in (1) senkrecht ist und η berührt, so folgt

$$(\alpha \xi) = -(\eta \eta) / (\eta \xi),$$

d. h.

$$(9) \quad \cos \phi = -(\eta \xi) / (\eta \xi),$$

wo ϕ der Winkel zwischen η und ξ ist.

Wenn ein Kreis p, q, η in (1) berührt, so folgt

$$(10) \quad \cos \varphi = (p\xi) = \{1 - (\eta q)\} / (\eta \xi),$$

wo φ der Winkel zwischen p und ξ ist.

Wenn η in (1) mit ξ, q einen gleichen Winkel bildet, so entsteht

$$(11) \quad \eta = (\eta \xi) \{ \xi + q \},$$

wo $(\eta \xi) = \pm 1 / \sqrt{2}$ sein muss.

(N) Wir betrachten

$$(1) \quad \eta = \cos \alpha \cdot \xi + \sin \alpha \cdot \xi'$$

in THOMSENS Arbeit.⁽¹⁾

Gehen η immer durch einen festen Punkt \bar{v} in R_2 , so folgt

$$(2) \quad \cos \alpha \cdot (\xi \bar{v}) + \sin \alpha \cdot (\xi' \bar{v}) = 0,$$

$$\text{d. h.} \quad \sin \alpha = \frac{(\xi \bar{v})}{\sqrt{(\xi' \bar{v})^2 + (\xi \bar{v})^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{(\xi' \bar{v})}{\sqrt{(\xi' \bar{v})^2 + (\xi \bar{v})^2}}.$$

Daraus ergibt sich

$$(3) \quad \eta = \frac{(\xi \bar{v})}{\sqrt{(\xi' \bar{v})^2 + (\xi \bar{v})^2}} \xi + \frac{(\xi' \bar{v})}{\sqrt{(\xi' \bar{v})^2 + (\xi \bar{v})^2}} \xi'.$$

Nehmen wir q, p anstatt η bzw. ξ in (3), so folgt

$$(4) \quad q = \frac{(p \bar{v})}{\sqrt{(p' \bar{v})^2 + (p \bar{v})^2}} p + \frac{(p' \bar{v})}{\sqrt{(p' \bar{v})^2 + (p \bar{v})^2}} p'.$$

Aus (3) und (4) ergibt sich

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \psi = (q\eta) &= \frac{(\xi \bar{v})}{\sqrt{(\xi' \bar{v})^2 + (\xi \bar{v})^2}} \frac{(p \bar{v})}{\sqrt{(p' \bar{v})^2 + (p \bar{v})^2}} (\xi p) \\ &+ \frac{(\xi \bar{v})}{\sqrt{(\xi' \bar{v})^2 + (\xi \bar{v})^2}} \frac{(p' \bar{v})}{\sqrt{(p' \bar{v})^2 + (p \bar{v})^2}} (p \xi') \end{aligned} \right.$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Hamb. Univ. IV Bd., S. 132.

$$\left[\begin{aligned} & + \frac{(\xi \bar{v})}{\sqrt{(\xi' \bar{v})^2 + (\xi \bar{v})^2}} \frac{(p \bar{b})}{\sqrt{(p' \bar{v})^2 + (p \bar{v})^2}} (\xi' p') \\ & + \frac{(p \bar{v})}{\sqrt{(\xi' \bar{v})^2 + (\xi \bar{v})^2}} \frac{(p \bar{b})}{\sqrt{(p' \bar{v})^2 + (p \bar{v})^2}} (\xi' p'), \end{aligned} \right.$$

wo ϕ der Winkel zwischen ξ und η ist.

Berührt η in (3) einen Kreis \mathcal{G} , so entsteht.

$$(6) \quad 1 = \frac{(\xi \bar{v})}{\sqrt{(\xi' \bar{v})^2 + (\xi \bar{v})^2}} (\xi \mathcal{G}) + \frac{(\xi \bar{b})}{\sqrt{(\xi' \bar{v})^2 + (\xi \bar{v})^2}} (\xi \mathcal{G}).$$

N. B. Wenn η in (1) zu einem Kreis senkrecht ist, so bestehen (2), (3) und (4) auch.

Nun betrachten wir

$$(7) \quad \hat{\xi}(t) = \xi(t) + \lambda(t) v(t),$$

wo $\lambda(t)$ die skalaren Größen sind.

Aus (7) folgt⁽¹⁾

$$(8) \quad \dot{\hat{\xi}} v = \dot{\xi} v + \lambda \dot{v}^2 = -c,$$

$$\therefore \lambda = -\frac{c + \dot{\xi} v}{v^2}, \quad \text{d. h.} \quad \hat{\xi} = \xi - \frac{c + \dot{\xi} v}{v^2} v.$$

(O) Wenn die Tangente η in v durch den Affinkrümmungsmittelpunkt geht, so ist

$$(1) \quad \eta = \left\{ \frac{d\rho}{dt} : \sqrt{9 + \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2} \right\} \xi + \left\{ 3 : \sqrt{9 + \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2} \right\} \xi',$$

wo η , v , ξ , t in THOMSENS Arbeit⁽²⁾ stehen und ρ der Krümmungshalbmesser von $v(t)$ ist. Wir wollen (1) K-Affinnormalen untersuchen.

Wenn bei einer Kurve v in R_2 alle K-Affinnormalen durch ein und denselben Punkt p gehen, so ist⁽³⁾

$$(2) \quad 0 = (p\eta) = \left\{ \frac{d\rho}{dt} : \sqrt{9 + \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2} \right\} (\xi p)$$

(1) THOMSEN, a. a. O., S. 127.

(2) THEMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd. S. 132.

(3) MATUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (I), Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ. V, p. 58.

$$+ \left\{ 3: \sqrt{9 + \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2} \right\} (\xi'p),$$

$$\text{d. h. (3)} \quad \{d\rho/dt\} (\hat{\xi}p) + 3(\xi'p) = 0, \quad 9 + (d\rho/dt)^2 \neq 0$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass ein K-Mittelpunktkegelschnitt ist, dessen K-Mittelpunkt p ist.

Die Einhüllende der K-Affinnormalen (1) einer Kurve v soll die K-Affinevolute von v heißen.

Aus (3) kann man wissen, dass

$$(4) \quad \tan \varphi \left(= \frac{1}{3} \frac{d\rho}{dt} \right) = - \frac{(\xi'p)}{(\hat{\xi}p)}$$

ist, wo φ die Deviation von v ist.⁽¹⁾

Ist ein Kreis ζ zu η senkrecht, so folgt

$$(\zeta\eta) = 0,$$

$$\text{d. h. (5)} \quad \{d\rho/dt\} (\zeta\xi) + 3(\zeta\xi') = 0,$$

wo

$$(6) \quad 9 + (d\rho/dt)^2 \neq 0$$

ist.

Aus (5) folgt

$$(7) \quad \tan \varphi (= \frac{1}{3} d\rho/dt) = - (\xi'\zeta) / (\hat{\xi}\zeta).$$

Aus (4), (7) kann man wissen, dass

$$(8) \quad (\xi'p)/(\hat{\xi}p) = (\xi'\zeta)/(\hat{\xi}\zeta)$$

besteht, wenn $v(t)$ ein K-Mittelpunktkegelschnitt ist.

Weiter kann man wissen, dass

$$(9) \quad \begin{cases} v = \frac{dt}{dT} = \frac{1}{3 \tan \varphi} \frac{d\rho}{dT} = - \frac{(\rho\xi)}{3(\rho\xi')} \frac{d\rho}{dT}, \\ N = \frac{1}{9\rho \tan^2 \varphi} \left(\frac{d\rho}{dT} \right)^2 = \frac{(\zeta\xi)^2}{9\rho(\zeta\xi')^2} \left(\frac{d\rho}{dT} \right)^2 \end{cases}$$

besteht, wo v die Geschwindigkeit des Punktes und t das zur Zeit T durchlaufene Bogenstück von v bedeutet.

(1) MATUMURA, a. a. O., S. 57.

N steht in ROUTH'S Buch.⁽¹⁾

Die Gleichung des Kreises $\bar{\eta}$, der Tangente PM in ROUTH'S Aufgabe,⁽²⁾ ist

$$(10) \quad \bar{\eta} = \left\{ \frac{1}{3} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\rho}{c} \right\} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{3} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\rho}{c} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \xi \\ + \left\{ 1 + \left[\frac{1}{3} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\rho}{c} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \xi'.$$

Aus (1) und (10) ergibt sich⁽³⁾

$$(11) \quad (\eta\bar{\eta}) = \cos \phi = \left\{ \frac{1}{3} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\rho}{c} \right\} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{3} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\rho}{c} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ \times \left\{ \frac{d\rho}{dt} : \left[9 + \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ + \left\{ 3 : \left[9 + \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{3} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\rho}{c} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

wo ϕ der Winkel zwischen η und $\bar{\eta}$ ist.

Hier bedeutet $\sqrt{\quad}$

$$\pm \sqrt{\quad}.$$

Betrachten wir

$$(12) \quad \begin{cases} \bar{\eta} = \hat{\xi} \cos \alpha - \hat{\xi}' \sin \alpha, \\ \eta = \hat{\xi} \sin \alpha + \hat{\xi}' \cos \alpha, \end{cases}$$

$$\text{d. h. } (13) \quad \begin{cases} \bar{\eta} \cos \alpha + \eta \sin \alpha = \hat{\xi}, \\ -\bar{\eta} \sin \alpha + \eta \cos \alpha = \hat{\xi}'. \end{cases}$$

Daraus kann man wissen, dass $\bar{\eta}$, η zwei senkrechte Kreise sind.⁽⁴⁾

η bildet mit $\eta(t)$ einen Winkel φ .

ζ in (5) ist also

(1) ROUTH: Dynamics of a Particle, Cambrige, 1898, p. 12.

(2) ROTHE, R.: Aufgabe aus der Kurventheorie, Archiv der Math. und Physik III Reihe XXVIII, Heft 3/4, S. 171.

(3) MATUMURA, S.: Über Flächen und Kurven (VI), Mem. of the Fac. of Sci. and Agr., Taihoku Imp. Univ. Vol. X (1933), S. 34.

(4) THOMSEN, a. a. O., S. 132.

$$(14) \quad \zeta = \left\{ 3; \sqrt{9 + \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2} \right\} \xi - \left\{ \frac{d\rho}{dt}; \sqrt{9 + \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2} \right\} \xi'.$$

Wir wollen eine Formel für das Doppelverhältnis D von

$$\xi, \eta, \zeta, \xi'$$

ableiten :

$$\begin{aligned} (15) \quad D(\xi, \eta, \zeta, \xi') &= \frac{(\xi - \eta)(\zeta - \xi')}{(\xi - \xi')(\zeta - \eta)} \\ &= \frac{\left[\left\{ 1 - \frac{d\rho/dt}{\sqrt{9 + (d\rho/dt)^2}} \right\} \xi - \frac{3}{\sqrt{9 + (d\rho/dt)^2}} \xi' \right] \left[\frac{3}{\sqrt{9 + (d\rho/dt)^2}} \xi - \left\{ \frac{d\rho/dt}{\sqrt{9 + (d\rho/dt)^2}} + 1 \right\} \xi' \right]}{\left[\xi - \xi' \right] \left[\frac{3 - d\rho/dt}{\sqrt{9 + (d\rho/dt)^2}} \xi - \frac{d\rho/dt + 3}{\sqrt{9 + (d\rho/dt)^2}} \xi' \right]} \\ &= \frac{[\{ \sqrt{9 + (d\rho/dt)^2} - d\rho/dt \} \xi - 3\xi'] [3\xi - \{ d\rho/dt + \sqrt{9 + (d\rho/dt)^2} \} \xi']}{[\xi - \xi'] [\{ 3 - d\rho/dt \} \xi - \{ d\rho/dt + 3 \} \xi']} . \end{aligned}$$

Setzen wir $\alpha = 0, \pi/4, 3\pi/4, \pi$ in

$$\eta = \cos \alpha \cdot \xi + \sin \alpha \cdot \xi',$$

so folgt

$$\xi, 1/\sqrt{2} (\xi + \xi'), 1/\sqrt{2} (-\xi + \xi'), \xi'.$$

In diesem Falle folgt

$$D \{ \xi, 1/\sqrt{2} (\xi + \xi'), 1/\sqrt{2} (-\xi + \xi'), \xi' \} = 0.$$

(P) Die Gleichung

$$(1) \quad F(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}, u) = 0$$

mit einer willkürlichen Konstante u stellt einen Punkt in R_3 dar.

Wenn u sich verändert, so bezeichnet (1) eine Kurve (k) in R_3 , wo ξ^a die Kugeln in R_3 bedeuten.

Sind $F = 0$ und $F_u = 0$, so liegt (k) auf den Einfüllenden von (1).

(Q) Wir betrachten eine Kreisfläche $\xi(t, \tau)$, deren Gleichung ist

$$(1) \quad \xi = f(t) + \tau g(t).$$

Es folgt

$$(2) \quad \xi_t = f'(t) + \tau g'(t), \quad \xi_\tau = g(t).$$

Daraus kann man wissen, dass

$$(3) \quad g(t)f'(t) + \tau g(t)g'(t) = 0$$

die Bedingung dafür ist, dass \mathfrak{x} ein Kurvennetz bestimmt, das rechtwinklig wird,

Die Parameterkurven (t) und (τ) von (1) sind dann und nur dann zueinander konjugiert, wenn

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t \partial \tau} = A(t, \tau) \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} + B(t, \tau) \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \tau},$$

$$\text{d. h.} \quad g'(t) = A(t, \tau) \{f'(t) + \tau g'(t)\} + B(t, \tau) g(t)$$

genügt, wo A und B die Funktionen von t und τ sind.

Ist

$$(5) \quad \partial^2 \mathfrak{x} / \partial u \partial v = 0, \quad \text{d. h.} \quad g'(t) = 0,$$

so sind \mathfrak{x} die Translationskreisfläche.

(R) Im folgenden teilen wir über Kreisgeometrie in R_2 mit.

Es seien ξ und η zwei Kreise in R_2 , so bildet der Kreis $\bar{\xi}$ in

$$(1) \quad \bar{\xi} = \cos \varphi \cdot \xi + \sin \varphi \cdot \eta$$

mit ξ den Winkel φ und der Kreis $\bar{\eta}$ in

$$(2) \quad \bar{\eta} = \sin \bar{\varphi} \cdot \xi + \cos \bar{\varphi} \cdot \eta$$

mit η den Winkel $\bar{\varphi}$.

Das Doppelverhältnis D von $\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta}$ lautet:

$$(3) \quad D(\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta}) = \frac{\sin \varphi \sin \bar{\varphi}}{\cos \varphi \cos \bar{\varphi}},$$

$$\therefore (1+D):(1-D) = \cos(\varphi - \bar{\varphi}) : \cos(\varphi + \bar{\varphi}).$$

Weiter betrachten wir

$$\dot{\bar{\xi}} = \cos \varphi \cdot \dot{\xi} + \sin \varphi \cdot \dot{\eta}, \quad \ddot{\bar{\xi}} = \cos \varphi \cdot \ddot{\xi} + \sin \varphi \cdot \ddot{\eta},$$

$$\dot{\bar{\xi}} = \cos \varphi \cdot \dot{\xi} + \sin \varphi \cdot \dot{\eta}, \quad \dot{\bar{\xi}} = d\bar{\xi}/d\theta,$$

wo $\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$, $\ddot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\ddot{\eta}$, $\ddot{\eta}$, $\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$ und $\ddot{\xi}$ die Kugeln sind,⁽¹⁾ so bestehen

$$(4) \quad \begin{cases} \xi \perp \dot{\xi}, & \dot{\xi} \perp \ddot{\xi}, & \ddot{\xi} \perp \ddot{\xi}, \\ \eta \perp \dot{\eta}, & \dot{\eta} \perp \ddot{\eta}, & \ddot{\eta} \perp \ddot{\eta}, \\ \ddot{\xi} \perp \dot{\xi}, & \dot{\xi} \perp \ddot{\xi}, & \ddot{\xi} \perp \ddot{\xi}. \end{cases}$$

(4)

(A) Wir betrachten zwei Kugeln

$$(1) \quad \eta^I = \xi + \alpha, \quad \eta^{II} = \xi - \alpha,$$

wo ξ , α zwei Kugeln sind.

Aus (1) ergibt sich

$$(2) \quad \begin{cases} (\eta^I \eta^{II}) = (\xi \xi) - (\alpha \alpha) = 0, \\ (\eta^I \xi) = 1 + (\alpha \xi), & (\eta^I \alpha) = (\xi \alpha) + 1, \\ (\eta^{II} \xi) = 1 - (\alpha \xi), & (\eta^{II} \alpha) = (\xi \alpha) - 1. \end{cases}$$

Aus (2) kann man wissen, dass η^I und η^{II} zueinander senkrecht sind, η^I halbiert den inneren Winkel zwischen ξ und α , η^{II} halbiert den äusseren Winkel zwischen ξ und α .

Nun

$$(3) \quad (d\eta^I d\eta^I) = (d\xi d\xi) + 2(d\xi d\alpha) + (d\alpha d\alpha),$$

$$(4) \quad (d\eta^{II} d\eta^{II}) = (d\xi d\xi) - 2(d\xi d\alpha) + (d\alpha d\alpha),$$

so folgt

$$(5) \quad (d\eta^I d\eta^I) + (d\eta^{II} d\eta^{II}) = 2(d\xi d\xi) + 2(d\alpha d\alpha).$$

Aus (5) folgt

$$(6) \quad \cos \eta^I + d\eta^I, \eta^I + d\eta^I + \cos \eta^{II} + d\eta^{II}, \eta^{II} + d\eta^{II} \\ = 2 \cos \xi + d\xi, \xi + d\xi + 2 \cos \alpha + d\alpha, \alpha + d\alpha,$$

denn $\eta^I \eta^I = 1$, u. s. w. bestehen.

(1) TAKASU, T.: Ein neues Dualitätsprinzip bei den Kurven im konformen Raume, Jap. Journ. of Math. II, S. 195.

(B) Betrachten wir

$$(7) \quad \eta^I = \alpha \xi + \beta a, \quad \eta^{II} = \alpha \xi - \beta a$$

statt (1), so folgt

$$(8) \quad \begin{cases} (\eta^I \eta^{II}) = \alpha^2 + \alpha \beta (\xi a) - \alpha \beta (\xi a) - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2, \\ (\xi \eta^I) = \alpha + \beta (\alpha \xi), \\ (\alpha \eta^I) = \alpha (\xi a) + \beta, \\ (\xi \eta^{II}) = \alpha - \beta (\alpha \xi), \\ (\alpha \eta^{II}) = \alpha (\xi a) - \beta, \end{cases}$$

wo α, β die skalaren Gröößen bedeuten.

Sind a und ξ zueinander senkrecht, so haben wir aus (8)

$$(9) \quad \begin{cases} (\eta^I \eta^{II}) = \alpha^2 - \beta^2, \\ (\xi \eta^I) = \alpha, \\ (\alpha \eta^I) = \beta, \\ (\xi \eta^{II}) = \alpha, \\ (\alpha \eta^{II}) = -\beta, \end{cases}$$

woraus sich ergibt:

$$(10) \quad \begin{cases} \cos \widehat{\eta^I \eta^{II}} = \alpha^2 - \beta^2, \\ \cos \widehat{\xi \eta^I} = \alpha, \\ \cos \widehat{\alpha \eta^I} = \beta, \\ \cos \widehat{\xi \eta^{II}} = \alpha, \\ \cos \widehat{\alpha \eta^{II}} = -\beta. \end{cases}$$

(C) Wir betrachten eine Transformation

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = \cos \chi \cdot \xi^* + \sin \chi \cdot \eta^*, \\ \eta = -\sin \chi \cdot \xi^* + \cos \chi \cdot \eta^*, \end{cases}$$

wo ξ, η, ξ^*, η^* die Kreise in R_2 , χ Parameter sind.

Aus (1) entsteht

$$(2) \quad \xi\eta = \sin \chi \cos \chi (\eta^* - \xi^*) + \cos 2\chi \cdot \xi^* \eta^*.$$

Wenn ξ und η zueinander senkrecht sind, so müssen ξ^* und η^* auch zueinander senkrecht sein, da $\eta^* + \xi^*$ und $\eta^* - \xi^*$ zueinander senkrecht sind.

(5)

Es sei eine Kugel im dreimensionalen Raum gegeben und solche homogene Punktkoordinaten wie

$$x^k (k = 1, 2, 3, 4)$$

derartig eingeführt, dass die Gleichung der Kugel die Gestalt bekommt :

$$(1) \quad (xx) \equiv -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

woraus folgt

$$(2) \quad (x_1 + ix_3)(x_1 - ix_3) - (x_0 + x_2)(x_0 - x_2) = 0,$$

so kann man setzen

$$(3) \quad \frac{x_1 + ix_3}{x_0 - x_2} = \frac{x_0 + x_2}{x_1 - ix_3} = \lambda$$

oder

$$(4) \quad \frac{x_1 - ix_3}{x_0 - x_2} = \frac{x_0 + x_2}{x_1 + ix_3} = \mu,$$

wo λ, μ zwei Parameter sind.

Somit folgt aus (3)

$$(5) \quad \begin{cases} -\lambda x_0 + x_1 + \mu x_2 + ix_3 = 0, \\ x_0 - \lambda x_1 + x_2 + i\lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

Setzen wir $\bar{\lambda}$ anstatt λ , $+i$ anstatt $-i$, so folgt

$$(6) \quad -\bar{\lambda} x_0 + x_1 + \bar{\lambda} x_2 - ix_3 = 0.$$

Also folgt

$$(7) \quad \begin{cases} \rho x_0 = i(\lambda \bar{\lambda} + 1), \\ \rho x_1 = i(\lambda + \bar{\lambda}), \\ \rho x_2 = i(\lambda \bar{\lambda} - 1), \\ \rho x_3 = i(\lambda - \bar{\lambda}), \end{cases} \quad i = \sqrt{-1},$$

wo ρ ein Proportionalitätsfaktor ist.

(6)

Im folgenden möchte ich eine Theorie der zweiparametrischen Kreisscharen im konformen Raume bilden.

Ist eine Kreisschar im konformen Raume vorgelegt, dann gibt es ein Paar Örter des Brennpunktes der Kreise.

Diese Örter sind jeder eine Fläche der zweiparametrischen. Sind die Gleichungen eines Paares der Örter:

$$(1) \quad (x\xi) \equiv x_0^2(u, v) + x_1^2(u, v) + x_2^2(u, v) + x_3^2(u, v) = 0,$$

$$(2) \quad (y\eta) \equiv y_0^2(u, v) + y_1^2(u, v) + y_2^2(u, v) + y_3^2(u, v) = 0,$$

so kann man die Gleichung der Kreisscharen als

$$(3) \quad (x\eta) \equiv x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 1$$

setzen, wobei u, v die Parameter bedeuten.⁽¹⁾

Nun betrachten wir $\xi(u, v)$ in THOMSENS Arbeit,⁽²⁾ so folgt⁽³⁾

$$(4) \quad \begin{cases} (x_i \xi_k) = \mathfrak{G}_i' \mathfrak{G}_k' \mathfrak{G}_{ks}, \\ (y_i \eta_k) = \mathfrak{G}_i' \mathfrak{D}_k' \mathfrak{D}_{ks}, \\ (x_i \eta_k) = \mathfrak{G}_i' \mathfrak{D}_k' \mathfrak{G}_{ks} + \mathfrak{N}_i \mathfrak{N}_k, \end{cases}$$

WO

-
- (1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tohoku Math. Journ. Vol. 34 (1931), p. 191.
 (2) THOMSEN, G.: Grundlagen der konformen Flächentheorie, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. Band 3, S. 49.
 (3) THOMSEN, a. a. O. S. 50.

$$(5) \quad \begin{cases} \mathfrak{G}_{ik} = (\xi_i \xi_k), & \mathfrak{G}^{11} = 0, & \mathfrak{G}^{22} = 1/\sqrt{\mathfrak{G}}, & \mathfrak{G}^{33} = -1/\sqrt{\mathfrak{G}}, \\ \mathfrak{G}^{23} = 0, & \mathfrak{G}_{ik} = (\eta \xi_{ik}), & \mathfrak{D}_{ik} = (\eta \xi_{ik}). \end{cases}$$

Wie es in meiner Arbeit⁽¹⁾ steht, besteht hier

$$(6) \quad \begin{cases} \sum dx_i dy_i = G_{ij} du^i du^j, \\ \sum (dx_i)^2 = g_{ij} du^i du^j, \\ \sum (dy_i)^2 = \bar{g}_{ij} du^i du^j, \end{cases}$$

so folgt

$$(7) \quad (g_{ij} + \bar{g}_{ij} \pm 2G_{ij}) \leq 0.$$

Weiter kann man

$$(8) \quad \sum d^2 y_i \cdot x_i = \sum d^2 x_i \cdot y_i = -G_{ij} du^i du^j, \quad g_{ij} = \bar{g}_{ij}$$

setzen, aus (7) folgt

$$(9) \quad (g_{ij} \pm G_{ij}) \leq 0.$$

Wir betrachten im folgenden

$$(10) \quad g_{ij} + G_{ij} = 0.$$

Wir nehmen positiv definite quadratische Grundform

$$(11) \quad \sum (dx^i)^2 = g_{ij} du^i du^j.$$

Wir bilden dann den schiefsymmetrischen Tensor E^{ik} mit

$$(12) \quad \frac{1}{(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

In diesem Falle bestehen⁽²⁾:

$$\begin{cases} B_{ik} = E_{il} G_l^k, & E_{il} E^{lk} = g_l^k, \\ \frac{1}{2} g^{ik} g_{ik} = 1, & \frac{1}{2} E^{ik} E_{ik} = 1, \\ \frac{1}{2} G^{ik} G_{ik} = 1, & \frac{1}{2} B^{ik} B_{ik} = 1, \end{cases}$$

(1) NAKAZIMA, S., a. a. O. S. 191.

(2) BLASCHKE, W.: Grundformeln der Flächentheorie, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. III Bd. (1924), S. 187.

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} g = g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}, \quad G = G_{11}G_{22} - G_{21}G_{12}, \\ B^{ik}G_{ik} = 0, \quad G^{ik}g_{ik} = 0, \\ g^{ik}B_{ik} = 0, \quad E^{ik}g_{ik} = 0, \\ E^{ik}B_{ik} = 0, \quad E^{ik}G_{ik} = 0, \\ B_{ik} = -E_{il}G_k^l, \quad G_{ik} = E_{il}B_k^l, \\ g_{ik} = B_{il}B_k^l, \quad g_{ik} = G_{il}G_k^l, \\ E_{ik} = -B_{il}G_k^l, \quad g_i^k = E_{il}E^{kl}, \\ g^{ik} = E^{ip}E^{kq}g_{pq}, \\ B^{ik} = -E^{ip}E^{kq}B_{pq}, \\ G^{ik} = E^{ip}E^{kq}G_{pq}. \end{array} \right.$$

(7)

(A) In (3) in meiner Arbeit⁽¹⁾ haben wir

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta.$$

Setzen wir

$$\rho_\alpha = \mu \bar{\rho}_\alpha + \nu \bar{\bar{\rho}}_\alpha$$

in (1), so folgt

$$\begin{aligned} (2) \quad \cos^2 \varphi &= T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \\ &= \mu^2 \phi(\bar{\rho}, \bar{\rho}) + 2\mu\nu \phi(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}) + \nu^2 \phi(\bar{\bar{\rho}}, \bar{\bar{\rho}}), \end{aligned}$$

wo

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(\bar{\rho}, \bar{\rho}) = T^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta, \\ \phi(\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}) = T^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \bar{\bar{\rho}}_\beta, \\ \phi(\bar{\bar{\rho}}, \bar{\bar{\rho}}) = T^{\alpha\beta} \bar{\bar{\rho}}_\alpha \bar{\bar{\rho}}_\beta. \end{array} \right.$$

In (2) und (3) besteht

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XX), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Vol. XVIII, S. 243.

$$(4) \quad \mu^2 \phi(\bar{\rho}, \bar{\rho}) + 2\mu\nu\phi(\bar{\rho}, \bar{\rho}) + \nu^2\eta(\bar{\rho}, \bar{\rho}) \geq 0,$$

weil

$$(5) \quad \cos^2 \varphi \leq 0,$$

wo

$$(6) \quad \mu \neq 0, \quad \nu \neq 0.$$

Aus (4) ergibt sich

$$(7) \quad \phi(\bar{\rho}, \bar{\rho})\phi(\bar{\rho}, \bar{\rho}) - \phi^2(\bar{\rho}, \bar{\rho}) > 0.$$

(B) Die folgenden Zeilen bilden eine Fortsetzung der in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit „Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (1)⁽¹⁾“, deren Kenntnis daher vorausgesetzt wird.

Wir haben

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta.$$

Nun setzen wir

$$(2) \quad \rho^\alpha = T^{\alpha\beta} \rho_\beta, \quad \cos^2 \varphi \equiv \rho^2$$

in (1). so folgt aus (1), (2)

$$(3) \quad \rho^2 = \rho^\alpha \rho_\alpha.$$

Ist $\rho(t)$ konstant, so entsteht

$$(4) \quad d(\rho^\alpha \rho_\alpha) = \rho^\alpha d\rho_\alpha + \rho_\beta d\rho^\beta \\ = \rho^\alpha (d\rho_\alpha - L_{\beta\alpha}^\gamma dt^\gamma) = 0$$

wo t ein Parameter, $L_{\beta\alpha}^\gamma$ eine Komponente von affiner Übertragung ist.

Man kann also sagen: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ρ einer Konstante gleich ist, ist (4).

(C) Die folgenden Zeilen bilden eine Fortsetzung der in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit⁽²⁾ „Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (V)“, § 1, deren Kenntnis daher vorausgesetzt wird.

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (I), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ., Vol. V, S. 120, §30.

(2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (V), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ., Vol. (V), S. 306.

Aus

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

erhalten wir

$$\sinh^2 \varphi/i = -\sin^2 \varphi = (T^{\alpha\beta} - A^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta,$$

$$\cosh^2 \varphi/i = \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

$$\tanh^2 \varphi/i = -\tan^2 \varphi = \frac{(T^{\alpha\beta} - A^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta}{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta},$$

$$\coth^2 \varphi/i = -\cot^2 \varphi = \frac{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta}{(T^{\alpha\beta} - A^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta},$$

$$\operatorname{sech}^2 \varphi/i = \sec^2 \varphi = \frac{A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta}{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta},$$

$$\operatorname{cosech}^2 \varphi/i = -\operatorname{cosec}^2 \varphi = \frac{A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta}{(T^{\alpha\beta} - A^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta}.$$

(D) Wir haben

$$(1) \quad T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \text{ und } A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

von denen die erstere wegen $T > 0$ sicher nicht ausgeartet ist. Bekanntlich gilt nun der Satz, dass man solches Formenpaar immer durch eine Hauptachsentransformation in das Formenpaar

$$(2) \quad \rho_I^2 + \rho_{II}^2 \text{ und } A^{11} \rho_I^2 + A^{22} \rho_{II}^2$$

überführen kann, und zwar dies im allgemeinen auf eine und nur eine Art, allein in dem Falle

$$(3) \quad A^{\alpha\beta} \text{ prop. } T^{\alpha\beta}$$

auf unendlich viele geht.

Schliessen wir den Fall (3) aus, so können wir also auf eine und nur eine Art zwei Hilfskugeln durch \mathfrak{K} annehmen, sodass

$$(4) \quad T^{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad A^{12} = 0$$

wird.

Ebenso können wir die Kugeln durch $\tilde{\mathfrak{K}}$ auf nur eine Art so wählen, dass

$$(5) \quad \bar{T}^{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}^{\lambda\mu} = 0$$

wird, wenn wir den Fall

$$(6) \quad \bar{A}^{\lambda\mu} \text{ prop. } \bar{T}^{\lambda\mu}$$

ausschliessen.

$$(8)$$

(A) Mit

$$(1) \quad w = x + iy, \quad i = \sqrt{-1}$$

kann man einen Punkt in R_3 bezeichnen, weil

$$(2) \quad (ww) = (xx) - (yy) + 2i(xy)$$

besteht, wo x und y zwei senkrechte feste Kugeln in R_3 sind.

Man kann leicht wissen, dass w nicht auf x und y liegen kann.

Gleichfalls kann man auch mit

$$(3) \quad \bar{w} = x - iy$$

den Punkt in R_3 bezeichnen.

Die Länge zwischen w und \bar{w} ist gleich zu

$$\sqrt{2},$$

da

$$(4) \quad (w\bar{w}) = (xx) + (yy) \\ = 2.$$

Wenn z , x und y berührt, so folgt aus (1)

$$\cos \varphi = 1 + i$$

wo φ der Winkel zwischen z und w ist.

Nun setzen wir

$$(5) \quad r = (pw) / (p\bar{w}),$$

wo p einen Punkt bedeutet.

Ist $r = 1$, so ist p der Mittelpunkt zwischen w und \bar{w} .

Aus (5) folgt

$$(6) \quad r = a^2 / b^2,$$

wo a die Länge zwischen p und w , b die Länge zwischen p und \bar{w} bedeutet.

Liegen w und \bar{w} auf einer Kugel z , so folgt

$$(7) \quad \begin{cases} (xz) + i(yz) = 0, \\ (xz) - i(yz) = 0. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich

$$(8) \quad \begin{cases} (xz) = 0, \\ (yz) = 0. \end{cases}$$

(8) bedeutet, dass z zu x und y senkrecht ist.

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha w + \beta \bar{w} \\ = \alpha (x + iy) + \beta (x - iy) \\ = (\alpha + \beta) x + i(\alpha - \beta) y \end{cases}$$

bedeutet die Punktreihe auf der Verbindungsgerade zwischen w und \bar{w} , wo α, β die skalaren Grössen sind.

Sind u, v zwei Parameter, so stellt $w(u, v)$ eine Fläche S dar.

Wenn

$$(10) \quad (w_u w_v) = 0$$

so wird dadurch auf S ein Kurvennetz bestimmt, das rechtwinklig wird.

Aus (10) wird bekommen :

$$(11) \quad (x_u + iy_u, x_v + iy_v) \\ = \{(x_u x_v) - (y_u y_v)\} + i \{(y_u x_v) + (x_u y_v)\} = 0.$$

Daraus folgt

$$(12) \quad (x_u x_v) = (y_u y_v), \quad (x_u y_v) = - (x_v y_u),$$

(12) ist unsere Bedingung.

Die quadratische Form ist

$$(13) \quad \delta w^2 = (w_i du^i)(w_k \delta u^k) = g_{ik} \delta u^i \delta u^k,$$

wo

$$(14) \quad g_{ik} = (w_i w_k)$$

ist.

Weiter kann man untersuchen wie in der gewöhnlichen Differentialgeometrie.

$$(15) \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \varepsilon \mathfrak{y}$$

bezeichnet eine Kugel in R_3 , wo \mathfrak{x} und \mathfrak{y} zwei zueinander senkrechte Kugeln in R_n und $\varepsilon^2 = 0$ ist.⁽¹⁾

Weiter kann man wissen, dass \mathfrak{z} und \mathfrak{x} einander berühren und

$$(16) \quad \cos \varphi = \varepsilon$$

besteht, wo φ der Winkel zwischen \mathfrak{z} und \mathfrak{y} ist.

Setzen wir

$$(17) \quad \bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{x} - \varepsilon \mathfrak{y},$$

so ist $\bar{\mathfrak{z}}$ auch eine Kugel in R_3 .

Aus (15), (17) entsteht

$$(18) \quad \mathfrak{z} \bar{\mathfrak{z}} = 1,$$

woran man erkennt, dass \mathfrak{z} und $\bar{\mathfrak{z}}$ einander berühren.

$$(19) \quad p = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y} + \varepsilon \mathfrak{z}$$

bezeichnet einen Punkt in R_3 , wo \mathfrak{x} , \mathfrak{y} , \mathfrak{z} drei zueinander senkrechte Kugeln in R_n und $\varepsilon^2 = 0$ ist.

Aus (19) entsteht

$$(20) \quad \mathfrak{x}p = 1, \quad \mathfrak{y}p = i, \quad \mathfrak{z}p = \varepsilon.$$

\mathfrak{x} und \mathfrak{y} seien zwei Kugeln in R_n , so bezeichnet

$$(21) \quad w = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$$

(1) Vergl. BLASCHKE, W.: Differentialgeo. I (1930), S. 262.

einen Punkt in R_n und erklärt den Abstand ds zweier Nachbarpunkte durch die Formel

$$(22) \quad ds^2 = g_{ik} du^i du^k, \quad g_{ik} = (\xi_i + i\eta_i, \xi_k + i\eta_k).$$

Ist V^i ein beliebiger Tensor, so wollen wir sagen,

$$(23) \quad V_i = g_{ik} V^k$$

seien die kovarianten Koordinaten „desselben“ Tensors, da

$$(24) \quad V^i = g^{ik} V_k$$

besteht, wobei $g^{ik} = g^{ki}$ und

$$(25) \quad g_{ik} g^{kl} = g^l_i$$

ist.

Wir nennen

$$(26) \quad \ddot{u}^i = -\Gamma^i_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k$$

die Extremalen geodätischer Linien.

Die Größen Γ sind keine Tensoren. Sie sind unter der Schreibweise

$$(27) \quad \Gamma^i_{ik, r} = \left[\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right], \quad \Gamma^i_{ik} = \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\}$$

von *Christoffel* eingeführt worden.⁽¹⁾

(B) Wir betrachten zwei Kreisbüschel

$$\xi + i\eta$$

und

$$\xi + \epsilon\eta,$$

so wird der Winkel ϕ zwischen

$$\xi + i\eta$$

und

$$\xi + \epsilon\eta$$

mit

(1) Vergl. BLASCHKE, W.: Differentialgeo. II, S. 146.

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi &= (\xi + i\eta, \xi + \varepsilon\eta) \\
 &= \langle 1 + i\varepsilon \rangle + \langle i + \varepsilon \rangle (\xi\eta) \\
 &= \langle 1 + i\varepsilon \rangle + \langle i + \varepsilon \rangle \cos \varphi
 \end{aligned}$$

gegeben, wo φ der Winkel zwischen ξ und η , ξ und η zwei Kreise in R_2 sind, und i, ε stehen in (A).

Weiter haben wir

$$\begin{aligned}
 &(\lambda \langle \xi + i\eta \rangle + \mu \langle \xi + \varepsilon\eta \rangle)^2 \\
 &= \mu^2 + 2 \langle i\lambda^2 + \varepsilon\mu^2 \rangle (\xi\eta) \\
 &= \mu^2 + 2 \langle i\lambda^2 + \varepsilon\mu^2 \rangle \cos \varphi,
 \end{aligned}$$

wo λ, μ die Parameter sind

Somit kann man wissen, dass, wenn

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi &= \frac{(1 - \mu^2)}{2 \langle i\lambda^2 + \varepsilon\mu^2 \rangle}, \\
 &\cdot \lambda \langle \xi + i\eta \rangle + \mu \langle \xi + \varepsilon\eta \rangle
 \end{aligned}$$

ein Kreis ist.

Betrachten wir zwei Kreisebüschel

$$v + i\xi$$

und

$$w + i\eta,$$

wo v, w zwei Schnittpunkte zweier Kreise ξ und η in R_2 sind, so folgt

$$\begin{aligned}
 (v + i\eta, w + i\eta) &= a^2 - (\xi\eta) \\
 &= (vw) - \cos \varphi,
 \end{aligned}$$

woraus sich ergibt

$$\cos \{v + i\eta, w + i\eta\} = (vw) - \cos \varphi.$$

Ist $\hat{\xi}$ ein Kreis und $\xi + i\eta$ ein nicht auf ihm gelegener Kreis, so ist

$$(1) \quad \bar{\xi} + i\bar{\eta} = 2(\langle \xi + i\eta \rangle, \hat{\xi}) \hat{\xi} - \langle \xi + i\eta \rangle$$

der zu $\xi + i\eta$ in bezug auf den Kreis $\hat{\xi}$ inverse Kreis.

Wenn

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{x} = 2(x\xi)\xi - x, \\ \bar{y} = 2(y\xi)\xi - y, \end{cases}$$

so besteht (1), so folgt der

Satz: Wenn \bar{x} der zu x , \bar{y} der zu y in bezug auf den Kreis ξ inverse Kreis ist, so besteht (1).

(C) x, y seien zwei senkrechte Kreise in R_2 , so bezeichnen

$$(1) \quad x \pm \varepsilon y, \quad \varepsilon^2 = 0$$

die Kreise in R_2 .

$$(2) \quad x \pm iy, \quad i^2 = -1$$

bezeichnen die Punkte in R_2 .

Ferner bestehen

$$(3) \quad (x \pm \varepsilon y, x \pm iy) = 1 \pm i\varepsilon,$$

so liegen $x \pm iy$ auf $x \pm \varepsilon y$ nicht.

$$(4) \quad 2(x + iy, x + \varepsilon y)(x + \varepsilon y) - (x + iy)$$

ist der zu $x + iy$ in bezug auf den Kreis $x + \varepsilon y$ inverse Punkt.

(4) ist gleich

$$(5) \quad \{1 + 2i\varepsilon\}x + \{2\varepsilon - i\}y,$$

so ist (5) der zu $x + iy$ in bezug auf den Kreis $x + \varepsilon y$ inverse Punkt.

Der Quadrat des Abstandes zwischen zwei Punkten (5) und $x + iy$ ist mit

$$(6) \quad 2 + 4i\varepsilon$$

gegeben.

$$(7) \quad \{1 - 2i\varepsilon\}x - \{2\varepsilon + i\}y$$

ist der zu $x + iy$ in bezug auf den Kreis $x - \varepsilon y$ inverse Punkt.

Weiter besteht

$$(8) \quad d^2 = 0,$$

wo d der Abstand zwischen zwei Punkten (7) und $\xi - i\eta$.

Ferner kann man wissen, dass

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\xi, \xi + i\eta, \xi + \varepsilon\eta, \eta|^2 \\ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+i\varepsilon & i \\ 1 & 1+i\varepsilon & 1 & \varepsilon \\ 0 & i & \varepsilon & 1 \end{vmatrix} \\ = \varepsilon i \end{array} \right.$$

besteht.

Zwei Kreise $\xi + \varepsilon\eta$ und $\xi - \varepsilon\eta$ bestimmen einen Kreisbüschel, dessen ∞^1 Kreise ζ gegeben sind durch

$$(10) \quad \begin{aligned} \zeta &= \alpha \{\xi + \varepsilon\eta\} + \beta \{\xi - \varepsilon\eta\} \\ &= (\alpha + \beta)\xi + (\varepsilon\alpha - \varepsilon\beta)\eta, \end{aligned}$$

wo α und β irgendwelche skalare Zahlen sind.

Wir wollen eine Formel für das Doppelverhältnis D von

$$\xi, \quad \xi + i\eta, \quad \xi + \varepsilon\eta, \quad \eta$$

ableiten:

$$(11) \quad \begin{aligned} D(\xi, \xi + i\eta, \xi + \varepsilon\eta, \eta) &= \frac{(\xi - \xi - i\eta)(\xi + \varepsilon\eta - \eta)}{(\xi - \eta)(\xi + \varepsilon\eta - \xi - i\eta)} \\ &= \frac{i \{\xi + (\varepsilon - 1)\eta\} \eta}{\{i - \varepsilon\} \{\xi - \eta\} \eta} = i, \end{aligned}$$

weil ξ und η zueinander senkrecht sind.

(D) Fünf Punkte

$$\xi_{(j)} + i\eta_{(j)}, \quad (j = 1, 2, \dots, 5),$$

für die

$$|\xi_{(1)} + i\eta_{(1)}, \dots, \xi_{(5)} + i\eta_{(5)}| = 0$$

ist, liegen, wie leicht nachzuweisen ist, auf einer und derselben Kugel, wo $\xi_{(j)}$, $\eta_{(j)}$ zwei senkrechte Kugeln in R_4 und $i = \sqrt{-1}$ ist.

Zu vier gegebenen Kugeln

$$x_{(j)} + \varepsilon y_{(j)}, \quad (j = 1, 2, \dots, 4)$$

mit nicht verschwindender Matrix

$$\| x_{(1)} + \varepsilon y_{(1)}, \dots, x_{(4)} + \varepsilon y_{(4)} \|$$

können wir eine neue Kugel $x + \varepsilon y$ eindeutig festlegen:

$$(x + \varepsilon y, \eta) = | x_{(1)} + y_{(1)}, \dots, x_{(4)} + \varepsilon y_{(4)}, \eta |.$$

Künftig werden wir das vektorielle Produkt symbolisch als Kugel

$$\zeta = \| x_{(1)} + \varepsilon y_{(1)}, \dots, x_{(4)} + \varepsilon y_{(4)} \|$$

bezeichnen.

Es ist sofort ersichtlich, dass ζ die gemeinsame Orthogonalkugel $x + \varepsilon y$ ist.

(9)

Im folgenden untersuchen wir verschiedene natürliche Parameter.

Ist x ein Punkt in R_3 , so entsteht

$$(1) \quad (xx) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

die jetzt nicht mehr $x = 0$ ist. Daraus ergibt sich

$$(2) \quad (xx') = 0, \quad (3) \quad (xx'') = -x'^2,$$

wo x_i drei kartesische Koordinaten eines Punktes x in R_3 bedeuten.

Aus (1), (2), (3) besteht

$$(4) \quad (xx'x'')^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -x'^2 \\ 0 & x'^2 & x'x'' \\ -x'^2 & x'x'' & x''^2 \end{vmatrix} = x'^4,$$

woraus folgt, dass $(xx'x'')$ oder x'^2 nur dann identisch verschwinden kann, wenn $x \times x'$ ist.

Ebenso gilt allgemein identisch von dem beliebigen Vektor v

$$(5) \quad (\xi \xi' b)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \xi b \\ 0 & \xi'^2 & \xi' b \\ \xi b & \xi' b & b b \end{vmatrix} = -(\xi b)^2 \cdot \xi'^2.$$

Bei der Einführung eines neuen Parameters p auf (4) ergibt sich

$$(6) \quad \{\sqrt{(\xi \xi' \xi'')}\}_p dp/dt = \{\sqrt{(\xi \xi' \xi'')}\}_t.$$

Wollen wir also den neuen Parameter p so wählen, dass

$$(7) \quad \{\sqrt{(\xi \xi' \xi'')}\}_p = -1$$

wird, so brauchen wir nur

$$(8) \quad p = - \int \{\sqrt{(\xi \xi' \xi'')}\}_t dt$$

zu setzen.

Aus (5) folgt

$$(9) \quad \left\{ \frac{(\xi \xi' b)}{(\xi b)} \right\}_p \frac{dp}{dt} = \left\{ \frac{(\xi \xi' b)}{(\xi b)} \right\}_t.$$

Wollen wir also den neuen Parameter p so wählen, dass

$$(10) \quad (\xi \xi' b)_p = -(\xi b)_p$$

wird, so brauchen wir nur

$$(11) \quad p = \int \sqrt{-\frac{(\xi \xi' b)_t}{(\xi b)_t}} dt$$

zu setzen, wo b einen beliebigen konstanten Vektor bedeutet.⁽¹⁾

In dem Falle

$$(\xi'' \xi'') \equiv x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0$$

besteht

$$(12) \quad p = \int \sqrt{-\frac{(\xi'' \xi''' b)_t}{(\xi'' b)_t}} dt,$$

wo

$$(\xi'' \xi''' b)_p = (\xi'' b)_p.$$

In diesem Falle wird für $t = p$

(1) VESSIO, F.: Comptes Rendus Bd. 140, S. 1331-1384. 1905.

STUDY, E.: Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven, Trans. Amer. Math. Soc. Bd. 10, S. 1-49, 1909.

$$(13) \quad \xi'' \times \xi''' = -\xi'',$$

woraus folgt

$$(14) \quad \xi'''^2 = -1.$$

Ferner ist⁽¹⁾

$$(15) \quad (\xi'' \xi''' \xi^{IV}) = -\xi'' \xi^{IV} = \xi'''^2 = -1.$$

(10)

(A) Es seien zwei Kreise ξ und η , die in zwei Punkten v und w geschnitten werden, in R_2 gegeben, dann bezeichnet

$$(1) \quad \lambda \xi + \mu \eta$$

die Kreisküschel (k), die v und w hindurchgehen, wo λ, μ die skalaren Größen sind.

So besteht

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\xi, \lambda \xi + \mu \eta, v, w)^2 \\ = \left| \begin{array}{cccc} 1 & \lambda + \mu \cos \phi & 0 & 0 \\ \lambda + \mu \cos \phi & \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \end{array} \right| \\ = -a^4 \mu^2 \sin^2 \phi, \end{array} \right.$$

wo ϕ der Winkel zwischen ξ und η , a der Abstand zwischen v und w ist. Daraus folgt

$$(3) \quad |(\xi, \lambda \xi + \mu \eta, v, w)^2| = a^4 \mu^2 \sin^2 \phi.$$

Aus (70) in BLASCHKE'S Buch⁽²⁾ kann man wissen, dass

$$(4) \quad \sin \tilde{\varphi} = \frac{|\xi, \eta, v, w|}{vw}$$

(1) BLASCHKE, W.: Differentialgeo., Dritte Auflage, S. 45.

(2) BLASCHKE, W.: Differentialgeo. III, S. 72.

ist, wo $\tilde{\varphi}$ der Winkel zwischen x und y ist.

Vergleichen wir beide linken Seiten von (3) und (4) miteinander, so kann man eine Relation zwischen ϕ und $\tilde{\varphi}$ wissen.

Dies ist eine Methode, die Relation zwischen ϕ und $\tilde{\varphi}$ zu finden.

$$(5) \quad V = \frac{x + iy}{(vw)}$$

bezeichnet einen Punkt, weil

$$V^2 = 0$$

ist, wenn x, y zueinander senkrecht sind.

(B) Aus

$$\begin{aligned} & (\{x - v\} + i \{y - w\})^2 \\ &= 2i \{ \langle xy \rangle + (vw) \} \\ &= 2i \{ \cos \phi + a^2 \} \end{aligned}$$

kann man wissen, dasz, wenn

$$\cos \phi = \{1 / 2i\} - a^2$$

besteht, so

$$\{x - v\} + i \{y - w\}$$

einen Kreis bezeichnet.

Aus

$$(y + ix, x + iy) = 2i$$

kann man wissen, dasz

$$\cos \{y + ix, \widehat{x + iy}\} = 2i$$

von dem Winkel zwischen x und y unabhängig ist.

Ist ξ ein Kreis und $x + iy$ ein nicht auf ihm gelegener Kreis. so ist

$$(6) \quad y + ix = 2(\{x + iy\}, \xi) \xi - \{x + iy\}$$

der zu $x + iy$ in bezug auf den Kreis ξ inverse Kreis.

Aus (6) kann man wissen, dasz

$$(7) \quad (\xi \eta) = (\xi \hat{\xi})$$

bestehen musz, wo ξ und η reelle sind.

Aus (7) kann man wissen, dasz

$$(8) \quad \cos \phi_1 = \cos \phi_2$$

ist, wo ϕ_1 der Winkel zwischen $\hat{\xi}$ und η ist und ϕ_2 der zwischen ξ und $\hat{\xi}$.

(C) Eine Allgemeinheit von (4) ist

$$(9)$$

$$(\lambda_1 \xi + \mu_1 \eta, \lambda_2 \xi + \mu_2 \eta, v, w)^2$$

$$= \begin{vmatrix} (\lambda_1^2 + \mu_1^2) + 2\lambda_1\mu_1 \cos \phi, & (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2) + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) \cos \phi, & 0, & 0 \\ (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2) + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) \cos \phi, & (\lambda_2^2 + \mu_2^2) + 2\lambda_2\mu_2 \cos \phi, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a^2 \\ 0, & 0, & a^2, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a^4 [(\lambda_1^2 + \mu_1^2) + 2\lambda_1\mu_1 \cos \phi] [(\lambda_2^2 + \mu_2^2) + 2\lambda_2\mu_2 \cos \phi]$$

$$+ a^4 [(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2) + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) \cos \phi] [(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2) + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) \cos \phi],$$

wo λ_i, μ_i der Parameter, ϕ der Winkel zwischen ξ und η ist.

Weiter besteht

$$|v, \xi - \eta, w|^2 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & a^2 \\ 0, & 2 - 2 \cos \phi, & 0 \\ a^2, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 4a^4 \sin^2 \{\phi / 2\},$$

wo ϕ der Winkel zwischen ξ und η , v und w zwei Schnittpunkte von zwei Kreisen ξ und η in R_2 sind.

Also sind die drei in der Determinante stehenden Vektoren linear unabhängig.

(D) Wenn ξ, η, ζ drei Kugeln sind, die in v und w in R_3 einander schneiden, so folgt

$$(\xi, \eta, \zeta, \nu, w)^2 = \begin{vmatrix} 1 & (\xi\eta) & (\xi\zeta) & 0 & 0 \\ (\xi\eta) & 1 & (\eta\zeta) & 0 & 0 \\ (\xi\zeta) & (\eta\zeta) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a^4 + a^4(\eta\zeta)^2 + a^4(\xi\eta)^2 - 2a^4(\xi\eta)(\eta\zeta)(\xi\zeta) + a^4(\xi\zeta)^2,$$

daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} (\xi, \eta, \zeta, \nu, w)^2 &= -a^4 + a^4 \cos^2 \phi_2 + a^4 \cos \phi_1 \\ &\quad - 2a^4 \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \phi_3 + a^4 \cos^2 \phi_3, \end{aligned}$$

wo ϕ_1 der Winkel zwischen ξ und η , ϕ_2 der Winkel zwischen η und ζ , der Winkel zwischen ζ und ξ ist.

(11)

(A) Sind ein Kreis a und ein Winkel θ in R_2 gegeben, so bezeichnen u in

$$(1) \quad f \equiv (au)^2 - (aa)(uu) \cos^2 \theta = 0$$

die Kreisscharen, die mit a einen festen Winkel in R_2 bilden, wo u als eine Veränderliche zu betrachten sind.

Ist ξ ein Punkt auf der Einfüllende aller u , so besteht⁽¹⁾

$$(2) \quad \begin{cases} (a\xi) = (aa)(au) \sin^2 \theta, \\ (\xi\xi) = (aa)(au)^2 \sin^2 \theta, \end{cases}$$

so entsteht

$$(3) \quad (a\xi)^2 - (aa)(\xi\xi) \sin^2 \theta = 0.$$

Sind $a, \theta; \mathfrak{B}, \phi$ gegeben, so ergibt sich

$$(4) \quad f \equiv (a\xi)^2 - (aa)(\xi\xi) \sin^2 \theta = 0,$$

(1) NISIUTI, T.: Non-Euclidean Geometrie, Iwanami Koza, p. 191

$$(5) \quad \varphi \equiv (\mathfrak{B}\mathfrak{x})^2 - (\mathfrak{B}\mathfrak{B})(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) \sin^2 \phi = 0.$$

Betrachten wir

$$(6) \quad \lambda f + \mu \varphi = 0,$$

so bezeichnet (6) die Kurvenscharen, die den Schnittpunkt von (4) und (5) hindurchgehen, wo λ, μ zwei Parameter sind.

Setzen wir

$$(7) \quad \lambda : \mu = (\mathfrak{B}\mathfrak{B}) \sin^2 \phi : -(\alpha\alpha) \sin^2 \theta,$$

so folgt aus (6)

$$(8) \quad \begin{cases} \sqrt{(\mathfrak{B}\mathfrak{B})}(\alpha\mathfrak{x}) \sin \phi - \sqrt{(\alpha\alpha)}(\mathfrak{B}\mathfrak{x}) \sin \theta = 0, \\ \sqrt{(\mathfrak{B}\mathfrak{B})}(\alpha\mathfrak{x}) \sin \phi + \sqrt{(\alpha\alpha)}(\mathfrak{B}\mathfrak{x}) \sin \theta = 0. \end{cases}$$

Wenn

$$(9) \quad \begin{cases} (\alpha\mathfrak{x}) = 0, \\ (\mathfrak{B}\mathfrak{x}) = 0 \end{cases}$$

sind, so bestehen (8).

(9) bezeichnet zwei Kreise k_1, k_2 , die zu α und \mathfrak{B} senkrecht sind.

Somit erhalten wir den

Satz: (8) bezeichnen zwei Kreise, die den Schnittpunkt von k_1 und k_2 hindurch gehen.

Aus (8) folgt

$$(10) \quad \frac{(\alpha\mathfrak{x}) / \sqrt{(\alpha\alpha)}(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}{(\mathfrak{B}\mathfrak{x}) / \sqrt{(\mathfrak{B}\mathfrak{B})}(\mathfrak{x}\mathfrak{x})} = \pm \frac{\sin \theta}{\sin \phi},$$

so folgt

$$(11) \quad \frac{\cos \lambda}{\cos \mu} = + \frac{\sin \theta}{\sin \phi},$$

wo λ der Winkel zwischen α und \mathfrak{x} , μ der zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{x} ist.

Weiter betrachten wir

$$(12) \quad \begin{cases} (\mathfrak{B}_x) \sqrt{(\mathfrak{C}\mathfrak{C})} \sin \phi_3 \pm (\mathfrak{C}_x) \sqrt{(\mathfrak{B}\mathfrak{B})} \sin \phi_2 = 0, \\ (\mathfrak{C}_x) \sqrt{(\mathfrak{a}\mathfrak{a})} \sin \phi_1 \pm (\mathfrak{a}_x) \sqrt{(\mathfrak{C}\mathfrak{C})} \sin \phi_3 = 0, \\ (\mathfrak{a}_x) \sqrt{(\mathfrak{B}\mathfrak{B})} \sin \phi_2 \pm (\mathfrak{B}_x) \sqrt{(\mathfrak{a}\mathfrak{a})} \sin \phi_1 = 0, \end{cases}$$

die drei Kreise wie in (8) bezeichnen, wo \mathfrak{a} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} drei feste Kreise in R_2 und ϕ_i ein gegebener Winkel ist.

Aus (12) nehmen wir

$$(13) \quad \begin{cases} (\mathfrak{B}_x) \sqrt{(\mathfrak{C}\mathfrak{C})} \sin \phi_3 + (\mathfrak{C}_x) \sqrt{(\mathfrak{B}\mathfrak{B})} \sin \phi_2 = 0, \\ (\mathfrak{C}_x) \sqrt{(\mathfrak{a}\mathfrak{a})} \cos \phi_1 + (\mathfrak{a}_x) \sqrt{(\mathfrak{C}\mathfrak{C})} \cos \phi_3 = 0, \\ (\mathfrak{a}_x) \sqrt{(\mathfrak{B}\mathfrak{B})} \cos \phi_2 - (\mathfrak{B}_x) \sqrt{(\mathfrak{a}\mathfrak{a})} \cos \phi_1 = 0, \end{cases}$$

so gehen drei Kreise (13) einen Punkt hindurch.

(B) Im folgenden behandeln wir die Liniengeometrie.

Die sechs Linienkoordinaten

$$p_\rho \quad (\rho = 1, 2, \dots, 6)$$

einer Geraden p sind an die quadratische Bedingung gebunden⁽¹⁾:

$$(1) \quad (pp) \equiv p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0.$$

Wir betrachten zwei Geraden \mathfrak{a} und \mathfrak{x} , wo \mathfrak{a} eine feste Gerade, \mathfrak{x} irgend eine andere Gerade und

$$(2) \quad \frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{x})}{\sqrt{(\mathfrak{a}\mathfrak{a})(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \cos \theta_0 (= \text{const.})$$

ist, so folgt

$$(3) \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{x})^2 - \cos \theta_0 (\mathfrak{a}\mathfrak{a})(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0.$$

Daraus besteht

$$(4) \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{x})^2 = 0,$$

weil

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0$$

ist.

Somit ergibt sich der

Satz: Wenn (2) besteht, so schneiden sich zwei Geraden \mathfrak{a} und \mathfrak{x} .

(1) THOMSEN, G.: Über projektive Flächentheorie, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., IV Bd. S. 234.

Aus (3) kann man wissen, dass

$$(5) \quad \begin{cases} (\alpha x) = (\alpha a)(\alpha u) \sin^2 \theta_0, \\ (x x)^2 = (\alpha a)(\alpha u)^2 \sin^2 \theta_0, \end{cases}$$

$$\text{d. h.} \quad (\alpha x)^2 = (\alpha a)(x x) \sin^2 \theta_0,$$

wo x die Einfüllendegerade aller u ist.

Nun betrachten wir

$$(6) \quad \begin{cases} f \equiv (\alpha x)^2 - (\alpha a)(x x) \sin^2 \theta_0 = 0, \\ \varphi \equiv (\mathfrak{B} x)^2 - (\mathfrak{B} \mathfrak{B})(x x) \sin^2 \phi_0 = 0, \end{cases}$$

wo α , \mathfrak{B} , θ_0 , ϕ_0 die Konstanten sind.

$$(7) \quad \lambda f + \mu \varphi = 0$$

bezeichnet den Geradenbüschel von f und φ , wo λ , μ die Parameter sind.

Nun setzen wir

$$(8) \quad \lambda : \mu = (\mathfrak{B} \mathfrak{B}) \sin^2 \phi_0 : -(\alpha a) \sin^2 \theta_0,$$

so folgen aus (7)

$$(9) \quad \begin{cases} \sqrt{(\mathfrak{B} \mathfrak{B})}(\alpha x) \sin \phi_0 - \sqrt{(\alpha a)}(\mathfrak{B} x) \sin \theta_0 = 0, \\ \sqrt{(\mathfrak{B} \mathfrak{B})}(\alpha x) \sin \phi_0 + \sqrt{(\alpha a)}(\mathfrak{B} x) = 0. \end{cases}$$

Wenn

$$(10) \quad \begin{cases} (\alpha x) = 0, \\ (\mathfrak{B} x) = 0 \end{cases}$$

sind, so besteht (8). Daraus kann man wissen, dass die Gerade x , die in α und \mathfrak{B} geschnitten wird, zu dem Geradenbüschel (7) gehört.

Betrachten wir drei Geraden

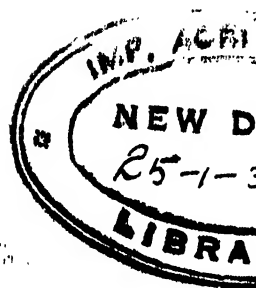
$$(11) \quad \begin{cases} (\mathfrak{B} x) \sqrt{(\mathfrak{C} \mathfrak{C})} \cos \phi_3 + (\mathfrak{C} x) \sqrt{(\mathfrak{B} \mathfrak{B})} \cos \phi_2 = 0, \\ (\mathfrak{C} x) \sqrt{(\alpha a)} \cos \phi_1 + (\alpha x) \sqrt{(\mathfrak{C} \mathfrak{C})} \cos \phi_3 = 0, \\ (\alpha x) \sqrt{(\mathfrak{B} \mathfrak{B})} \cos \phi_2 - (\mathfrak{B} x) \sqrt{(\alpha a)} \cos \phi_1 = 0, \end{cases}$$

die zu dem Geradenbüschel (7) gehören, so kann man wissen, dass x durch denselben Punkt geht.

臺北帝國大學理農學部紀要

第十九卷 第一號

昭和十一年八月



MEMOIRS
OF THE
FACULTY OF SCIENCE
AND
AGRICULTURE
TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

Vol. XIX, No. 1.-3

AUGUST, 1936



KATO, Ko:

Experimental Studies on the Agglutination of Mammalian Spermatozoa
with Special Reference to its Bearing upon Fertilization



PUBLISHED

BY THE

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

FORMOSA, JAPAN

PUBLICATION COMMITTEE

Professor Jinshin YAMANE, Dean of the Faculty (*ex officio*)

Professor Ichirô HAYASAKA

Professor Tyôzaburo TANAKA

The MEMOIRS OF THE FACULTY OF SCIENCE AND AGRICULTURE, Taihoku Imperial University, are published occasionally by the University, which exchanges them with the publications of other learned bodies and institutions throughout the world. Separate series will be sent to individual research institutions, and complete series to the central libraries of universities and larger institutions. Copies of the Memoirs may also be obtained from MARUZEN COMPANY LTD., Tôkyô, Japan, and THE TAIWAN NICHU-NICHU SHIMPÔ-SHA, Taihoku, Formosa, Japan.

All communications regarding the Memoirs should be addressed to the Dean of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imperial University, Taihoku, Formosa, Japan.

臺北帝國大學理農學部紀要

第十九卷

昭和十一年

MEMOIRS
OF THE
FACULTY OF SCIENCE
AND
AGRICULTURE
TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

Volume XIX.

1936

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY
FORMOSA, JAPAN

CONTENTS

	<i>Page.</i>
KATO, Ko :—Experimental Studies on the Agglutination of Mammalian Spermatozoa with Special Reference to Its Bearing upon Fertilization.	1
OGURA, Kisajiro :—The Ticks Parasitic on the Principal Domestic Animals in Formosa, Japan.	75
YAMANE, Jinshin und ONO, Yutaka :—Rassenanatomische Untersuchungen der Hautstruktur vom Büffel, Zebu, Formosarind und Friesisch-Holländer im Hinblick auf das Problem der Tropenangepassung.	87

EXPERIMENTAL STUDIES ON THE AGGLUTINATION OF MAMMALIAN SPERMATOOZOA WITH SPECIAL REFERENCE TO ITS BEARING UPON FERTILIZATION

By

Ko KATO

(Accepted for publication, June 11, 1936.)

CONTENTS

	<i>Page</i>
Introduction	3
Material and methods... ..	4
I. Agglutination and mass-coagulation of spermatozoa <i>in vitro</i> in their relation to the hydrogen ion concentration... ..	7
1. Influence of the hydrogen ion concentration upon the agglutination of spermatozoa	7
2. Influence of the hydrogen ion concentration upon the mass-coagulation of spermatozoa	15
3. The nature of the agglutination and mass-coagulation of spermatozoa influenced by the hydrogen ion concentration... ..	20
II. Agglutination of spermatozoa as influenced by the secretions of the female genital tract and other body fluids	31
1. Agglutination of rabbit spermatozoa in the genital tract of the female rabbit... ..	31
i) Agglutination of spermatozoa ejaculated into the vagina in normal copulation... ..	31
ii) Agglutination of spermatozoa inseminated artificially into the vagina	35

iii) Agglutination in the test tube of spermatozoa ejaculated into the vagina	36
iv) Agglutination of spermatozoa in uterus and oviducts	36
v) Influence of the vaginal washings upon the agglutination of spermatozoa	39
vi) Influence of the mucus of uterus and oviducts upon the agglutination of spermatozoa	41
2. Agglutination of the rabbit spermatozoa in the secretions or extracts of the genital organs of the male rabbit... ..	42
3. Agglutination of the rabbit spermatozoa in the blood serum and other body fluids of the rabbit	44
i) Action of the blood serum	44
ii) Action of the peritoneal fluid	44
iii) Action of the aqueous humor	45
iv) Action of rabbit milk	46
4. Agglutination of the rabbit spermatozoa in the body fluids of different species	46
i) Action of horse blood serum	46
ii) Action of the vaginal washings of mare and cow... ..	47
iii) Action of cow's milk	48
5. The nature of the agglutination of the rabbit spermatozoa in the female genital tract	48
6. Agglutination of the horse spermatozoa in the blood serum and in the uterus of the mare... ..	57
III. Significance of sperm agglutination in regard to fertilization in mammals	59
IV. Summaries	68
1. Summary of part I	68
2. Summary of part II	69
3. Summary of part III	70
Literature cited	71
Explanation of plates	73

INTRODUCTION

In normal mammalian sperms the spermatozoa are evenly suspended in the mixture of secretions of the accessory sexual glands, and remain so, without forming any agglutinations.

According to YAMANE (1921), however, the horse spermatozoa have a strong tendency for agglutination in isotonic solutions of neutral salts such as BaCl_2 , CaCl_2 , SrCl_2 , MgCl_2 , KCl , NaCl and Na_2SO_4 , or of mono- or dinatrium phosphate, and agglutinate with their heads attached to each other in one central mass, and with their tails radiating and moving more or less actively. As regards the solutions of neutral salts, he found that the cations and the divalent ions show a stronger power for agglutination than the anions and monovalent ions, and that in a NaH_2PO_4 solution the spermatozoa agglutinate more intensively and rapidly than in a Na_2HPO_4 solution.

He states that agglutination is not restricted to any particular species, but is a phenomenon common to all species. In his opinion it is a vital response to the action of either the cations of alkaline salts, or of hydrogen ions, and is possible only as long as the spermatozoa are alive and motile.

The phenomenon of agglutination was also observed by KRZY-SZKOWSKY and PAWLOW (1927) in the sperm of the guinea-pig suspended in physiological saline solutions such as RINGER, TYRODE, HIRAKAWA, and 0.9% sodium chloride. The same authors found that also the spermatozoa of dogs, albino rats, bats, and men show some tendency to mass together but never to form a rosette. Although these authors do not put forward a definite explanation as to the exact nature of agglutination, their experimental results seem to point to ionic action as the principal factor.

Recently the present writer was struck by the strange fact that rabbit sperm introduced into the vagina by either normal copulation or artificial insemination shows strong agglutination greatly resembling that observed by YAMANE in the case of horse sperm in solutions of neutral salts or NaH_2PO_4 (Pl. II, Fig. 7).

It cannot be called otherwise than strange that the spermatozoa that fertilize the ova should agglutinate in the female genital tract not long after copulation while still on their way toward the oviducts.

The experiments of YAMANE and KRZYSZKOWSKY and PAWLOW referred to make it probable that the factors inducing agglutination of the spermatozoa in the female genital tract are of purely physico-chemical nature; this present work aims, on one side, at ascertaining whether these are the only ones, or whether, beside these, there are others, i. e. biological ones, and on the other side, at elucidating the physiological significance of agglutination for the fertilization phenomenon.

For this purpose, I studied, in the first place, the influence of hydrogen ion concentration upon the agglutination of the spermatozoa of rabbit and horse; in the second place, the sperm agglutination in the vagina of the rabbit resp. the horse; then, in the last place, discussed the significance of sperm agglutination in regard to fertilization in mammals.

I take this opportunity of expressing my sincere gratitude to Prof. Dr. YAMANE, without whose constant advice and encouragement it would have been impossible to carry out this work. I am also indebted to Dr. ÔSUGA for his frequent help in obtaining the required horse sperm.

MATERIAL AND METHODS

The spermatozoa used for the purposes of the present work were chiefly obtained from horse and rabbit. In the case of the horse we used the ejaculated sperm itself, but in the case of the rabbit we obtained the spermatozoa chiefly from the *Cauda epididymidis* and suspended them in glucose-phosphate-buffer solution.

Though YAMANE (1921) and YAMANE and KATO (1928) have already described the methods followed in obtaining the horse sperm, and the rabbit spermatozoa from the *Cauda epididymidis* I shall here once more describe them briefly, and shall also outline the methods

for securing the ejaculated rabbit sperm and "vaginal washings."

1. Method of Obtaining the Horse Sperm

The sperm was obtained by the condom method. The condom was made by cutting away the lower third or quarter of a well bleached bullock's bladder of the length of 35-40 cm, to the cut end of which a string 80-100 cm long was attached. The ejaculated sperm, obtained by putting this condom over the penis of a stallion at mating, was either used for experiments soon after collecting it or after transporting it to our laboratory. During transportation to our laboratory, the test tubes filled with the sperm were kept in a thermos bottle at 1°-2°C with ice water.

2. Method of Obtaining the Spermatozoa from the Epididymis of the Rabbit

From a mature buck rabbit one or both testicles were removed, the epididymis dissected off, put into a watchglass and cut in pieces with scissors. After the addition of glucose-phosphate-buffer solution, the contents of the watchglass was shaken and filtered through a silk-cloth in order to separate the spermatozoa from the tissues. For the present I call this sperm suspension the "Artificial-Glucose-Sperm." The glucose-phosphate-buffer solution is a kind of physiological solution that serves best to maintain the life of the spermatozoa of horse and rabbit *in vitro*. Its pH value is 7.4 and its composition is as follows ;

For horse (and sheep) spermatozoa :

10 cc $\frac{N}{10}$ H_3PO_4 + 17.2 cc $\frac{M}{10}$ $NaOH$ + 72.8 cc H_2O + 6 g glucose

For rabbit spermatozoa :

10 cc $\frac{M}{10}$ H_3PO_4 + 17.2 cc $\frac{M}{10}$ $NaOH$ + 72.8 cc H_2O + 4 g glucose

(see YAMANE & KATO 1928)¹⁾

1) We regret that we must correct on this occasion a misprint of an essential point in the original paper here cited. In the sentence: "Der Phosphatpuffer wurde aus N/10 Na_2HPO_4 + N/10 NaH_2PO_4 nach der Kurve von PRIDEAUX (1911) unter elektrometrischer Kontrolle hergestellt." (Biolog. Zentralbl. Bd. 48, Heft 8, 1928, p. 461), it must be read as M/10 H_3PO_4 + M/10 $NaOH$ instead of N/10 Na_2HPO_4 + N/10 NaH_2PO_4 .

3. Method of Obtaining the Ejaculated Sperm and the Vaginal Washings of the Rabbit

After mating one or more bucks with a doe-rabbit, the ejaculated sperm was obtained by sucking it gently from the vagina with a 1 cc glass-syringe connected with a rubber catheter of 20 cm in length and 0.2 cm in diameter.

As for the "Vaginal Washings," 1-2 cc of the glucose-phosphate-buffer solution or distilled water were first injected into the vagina with the glass-syringe just mentioned, and then, after the lapse of 3-5 minutes, the injected material was sucked from the vagina. This withdrawn material must be considered as a mixture of the vaginal and uterine secretions and the glucose-phosphate-buffer solution or distilled water. For the present this withdrawn material may be called "Vaginal Washings."

For the examination of the spermatozoa I used a glass slide to which a glass ring, 1.8 cm in diameter and 0.5 cm in height, had been firmly cemented with balsam. On this glass ring a cover glass was placed upside down after charging it with a drop of the sperm suspension by means of a glass rod. I found this arrangement most convenient for examining the sperm as a hanging drop. If the temperature is not kept constant, the experimental results will become irregular as the temperature bears an important influence upon the motility of the spermatozoa. For this reason the temperature of the drop of sperm suspension to be examined was kept at 32°C by placing the glass slide in an electric objective thermostat which was fitted to the objective stage.

Every 30 or 60 minutes, or, in some experiments, every 15 minutes a fresh drop of the sperm suspension was taken from the test tube and placed under the microscope.

For convenience sake in making notes, the degree of activity of the spermatozoa was classified into 3 stages according to the intensity of the vibration of the tails and the speed of the forward movement of the spermatozoa, namely:

most active (‡), active (++) and weak (+).

The intensity of agglutination was also classified into 3 stages according to the size of the agglutinated masses and to the number of them that appeared in a microscopical field. The intensity of the stages of agglutination was designated as follows:

“most intensive” (***),—when almost all the spermatozoa in a microscopical field were agglutinated into large masses (Pl. I, Fig. 1),

“intensive” (**),—when many of the spermatozoa in a microscopical field were agglutinated into relatively large masses,

“weak” (*),—when a very small number of the spermatozoa in a microscopical field were agglutinated into small masses.

As it is necessary to distinguish between the massing-together of living spermatozoa and that of dead ones, I denoted the former, called agglutination (Pl. I, Fig. 1), by the sign of *, and the latter, called mass-coagulation (Pl. I, Fig. 4), by a •.

When both phenomena occurred at the same time, the signs for the two phenomena were used in unilinear arrangement, such as *•, ***•, etc.; but when agglutination occurred first and mass-coagulation afterwards, the sign for agglutination was placed above that for mass-coagulation, as for example *•, *••, etc..

All the chemicals used in the experiments were of KAHLBAUM's special preparations, and all the water was re-distilled from distilled water in a hard-glass stiller.

I. AGGLUTINATION AND MASS-COAGULATION OF SPERMATOZOA *IN VITRO* IN THEIR RELATION TO THE HYDROGEN ION CONCENTRATION

1. Influence of the Hydrogen Ion Concentration upon the Agglutination of Spermatozoa

It has been ascertained by YAMANE (1921) that the hydrogen ion concentration has a decided influence on the agglutination of the

mammalian spermatozoa, but so far no experiments have been made concerning the relation between hydrogen ion concentration and the intensity of agglutination of mammalian spermatozoa. It was therefore necessary to clear up this point by using various acid, alkaline, and neutral salt solutions.

For this purpose the reagents were prepared by mixing varying amounts of dextrose solution (6% solution in the case of horse spermatozoa and 4% solution in the case of rabbit spermatozoa) with the required amount of acid, alkaline, or neutral salt solution so as to obtain a total quantity of 9 cc, to which 1cc of the sperm suspension was added in each case.

The intensity of the sperm agglutination was examined under the microscope at regular intervals, and the hydrogen ion concentration determined electrometrically using a MICHAELIS U tube.

In the first place NaH_2PO_4 was used to examine the relation between hydrogen ion concentration and the agglutination of horse and rabbit spermatozoa. When the pH value is reduced to 6.42 or 6.31 in the case of the horse, and 5.68–5.66 in the case of the rabbit (with an exceptional case of 6.23), the spermatozoa, after the lapse of $1\frac{1}{2}$ –7 hours, begin to agglutinate with their heads attached to each other in one central mass and their tails radiating and showing more or less movement.

The spermatozoa agglutinate more rapidly and in greater numbers, and the agglutinated masses become larger as the pH value decreases, and when the pH value is reduced to a certain point, all the spermatozoa agglutinate suddenly and most intensively in large masses. This point lies between 5.56 and 5.49 in the case of the horse, and between 5.38 and 5.19 in the case of the rabbit (Table 1).¹⁾

In the next place Na_2HPO_4 was used to examine the relation between hydrogen ion concentration and the agglutination of spermatozoa on the alkaline side.

1) Sheep spermatozoa which I also examined, begin to agglutinate at the pH value of 6.12 or 6.18 and show a most intensive agglutination at the pH value of 5.76 or 5.72.

TABLE 1.

Influence of the hydrogen ion concentration upon the agglutination of spermatozoa.

1. NaH_2PO_4 .

	Mols of NaH_2PO_4	Composition of the fluids used			pH Values of the fluids used		Motility of sp. immediately after mixing		Aggl. of spermatozoa			
		Volume of dextrose solution	Volume of NaH_2PO_4 solution	Volume of sperm					Time till aggl. sets in		Highest intensity	
		cc	cc	cc	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2
Horse	$\frac{M}{10} \text{NaH}_2\text{PO}_4$	9.00	0	1	•	7.08	##	##	h	h	—	—
		8.90	0.10	1	6.77	6.77	##	##			—	—
		8.75	0.25	1	6.42	6.59	##	##	7		*	—
		8.50	0.50	1	6.28	6.31	##	##	3	3	*	*
		8.25	0.75	1	6.16	6.16	##	##	2	1	*	*
		8.00	1.00	1	5.98	5.98	##	##	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	***	***
		7.00	2.00	1	5.63	5.77	##	##	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	***	***
		6.00	3.00	1	5.49	5.56	##	##	0	0	***	***
		5.00	4.00	1	5.35	5.46	##	##	0	0	***	***
Rabbit	$\frac{M}{20} \text{NaH}_2\text{PO}_4$	9.00	0	1	•	5.97	##	##			—	—
		8.90	0.10	1	5.90	5.84	##	##			—	—
		8.80	0.20	1	5.66	5.82	##	##	$1\frac{1}{2}$	2	*	—
		8.70	0.30	1	5.64	5.68	##	##	$1\frac{1}{2}$	1	*	*
		8.60	0.40	1	5.43	5.61	##	##	$\frac{1}{2}$	1	***	*
		8.50	0.50	1	5.52	5.51	##	##	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	***	***
		8.40	0.60	1	•	5.52	##	##	0	$\frac{1}{2}$	***	***
		8.30	0.70	1	5.26	5.42	##	##	0	$\frac{1}{2}$	***	***
		8.20	0.80	1	•	5.42	##	##	0	$\frac{1}{2}$	***	***
		8.10	0.90	1	•	5.38	##	##	0	0	***	***
		8.00	1.00	1	•	5.32	##	##	0	0	***	***
	$\frac{M}{10} \text{NaH}_2\text{PO}_4$	9.00	0	1	6.01	•	##	##			—	—
		8.90	0.10	1	6.23	•	##	##	2		*	—
		8.75	0.25	1	5.68	•	##	##	$\frac{1}{2}$		*	—
		8.50	0.50	1	5.37	5.67	##	##	0	2	***	*
		8.25	0.75	1	•	5.67	##	##	0	2	***	*
		8.00	1.00	1	•	5.26	##	##	0	$\frac{1}{2}$	***	***
		7.50	1.50	1	•	5.19	##	##	0	0	***	***
		7.00	2.00	1	•	5.28	##	##	0	0	***	***

Here the agglutination occurs when the pH value is increased to 8.30-8.38 in the case of the horse and to 8.23 or 8.35 in the case of the rabbit. Though the intensity of agglutination increases with the Na_2HPO_4 concentration, both the highest intensity of agglutination and the greatest activity of the spermatozoa are far lower than on the acid side (Table 2).

TABLE 2.

Influence of the hydrogen ion concentration upon the agglutination of spermatozoa.

2. Na_2HPO_4 .

	Composition of the fluids used			pH values of the fluids used			Motility of spermatozoa immediately after mixing			Time till agglutination sets in			Highest intensity of agglutination		
	Volume of dextrose solution	Volume of Na_2HPO_4 solution	Volume of sperm	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3
	M	10													
Horse	cc	cc	cc							h	h	h			
	9.00	0	1	7.22	6.89	7.02	##	##	##				—	—	—
	8.00	1	1	8.18	8.16	8.14	+	+	+				—	—	—
	7.00	2	1	8.26	8.24	8.21	+	+	+				—	—	—
	6.00	3	1	8.35	8.38	8.30	+	+	+	1½	1	½	*	*	*
	5.00	4	1	8.47	8.42	8.42	+	+	+	1	½	0	*	*	**
	4.00	5	1	8.54	8.49	8.51	+	+	+	½	0	0	*	**	**
Rabbit	3.00	6	1	8.61	8.52	8.52	+	+	+	0	0	0	**	**	**
				Ex. 1	Ex. 2		Ex. 1	Ex. 2		Ex. 1	Ex. 2		Ex. 1	Ex. 2	
	9.00	0	1	6.43	•		##	##					—	—	
	8.50	0.50	1	•	8.11		+	+					—	—	
	8.00	1.00	1	8.28	8.18		+	+					—	—	
	7.50	1.50	1	8.35	8.23		+	+		3	2		*	*	
	7.00	2.00	1	8.42	8.21		+	+		1	1		*	*	
	6.50	2.50	1	8.52	8.26		+	+		½	½		**	**	
	6.00	3.00	1	8.56	8.25		+	+		½	½		**	**	
	5.50	3.50	1	•	•		+	+		½	½		**	**	
	5.00	4.00	1	•	•		+	+		½	½		**	**	

Summarising the above results we may state: there occurs no agglutination as long as the pH value remains in the neighbourhood of the neutral point; it always occurs on the acid side and increases in intensity as the pH value decreases; it also occurs on the alkaline side but with far lower intensity than on the acid side.

These facts agree with the results of YAMANE's experiments (1921), in which he has shown that, in the solution of NaH_2PO_4 , the horse spermatozoa always agglutinate with increasing intensity and rapidity as its concentration increases and agglutinate suddenly at a concentration of $\frac{N}{35}$ or $\frac{N}{25}$, while in the Na_2HPO_4 solution they begin to agglutinate only when the concentration reaches above $\frac{N}{50}$ and the highest intensity of agglutination is lower than in the solution of NaH_2PO_4 .

In the third place, I examined the relation between hydrogen ion concentration and the agglutination of horse spermatozoa by use of various acids and alkalis such as hydrochloric acid, sulphuric acid, butyric acid, lactic acid, sodium hydroxide and sodium carbonate,

TABLE 3.

Influence of the hydrogen ion concentration upon the agglutination of horse spermatozoa.

3. Acids.

Acid solutions used	Composition of the fluids used			pH values of the fluids used		Motility of sp. immediately after mixing		Agglutination of spermatozoa			
	Volume of dextrose solution	Volume of Acid solution	Volume of sperm					Time till aggl. sets in		Highest intensity	
				Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2
$\frac{M}{100}$ Hydrochloric acid	cc	cc	cc					h	h		
	9.00	0	1	6.84	6.96	#	#			—	—
	8.90	0.10	1	6.70	6.92	#	#			—	—
	8.75	0.25	1	6.58	6.91	#	#			—	—
	8.50	0.50	1	6.41	6.70	#	#	4½		*	—
	8.25	0.75	1	5.99	6.48	#	#	1½	3½	*	*
	8.00	1.00	1	5.64	6.27	#	#	½	2½	**	*
	7.75	1.25	1	5.00	5.89	#	#	0	1	***	**
	7.50	1.50	1	4.47	5.75	#	#	0	½	***	**
	7.25	1.75	1	.	5.32	#	#	0	0	***	***

Acid solutions used	Composition of the fluids used			pH values of the fluids used		Motility of sp. immediately after mixing		Agglutination of spermatozoa			
	Volume of dextrose solution	Volume of Acid solution	Volume of sperm					Time till aggl. sets in		Highest intensity	
				Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2
$\frac{M}{200}$ Sulphuric acid	cc	cc	cc					h	h		
	9.00	0	1	7.14	6.96	##	##			—	—
	8.90	0.10	1	6.92	6.92	##	##			—	—
	8.75	0.25	1	6.73	6.78	##	##			—	—
	8.50	0.50	1	6.52	6.63	##	##			—	—
	8.25	0.75	1	6.26	6.48	##	##	3	4	*	*
	8.00	1.00	1	5.79	6.20	##	##	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	**	*
	7.75	1.25	1	5.32	6.13	##	##	0	1	***	**
	7.50	1.50	1	4.85	5.96	##	##	0	$\frac{1}{2}$	***	**
	7.25	1.75	1	4.45	5.48	##	##	0	0	***	***
$\frac{M}{100}$ Butyric acid				Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2
	9.00	0	1	7.14	7.13	##	##			—	—
	8.90	0.10	1	6.96	7.01	##	##			—	—
	8.75	0.25	1	6.74	6.85	##	##			—	—
	8.50	0.50	1	6.68	6.78	##	##			—	—
	8.25	0.75	1	6.25	6.55	##	##	8	7	*	*
	8.00	1.00	1	5.98	6.39	##	##	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	*	*
	7.75	1.25	1	5.62	6.12	##	##	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**	**
	7.50	1.50	1	5.31	5.79	##	##	0	$\frac{1}{2}$	***	**
	7.25	1.75	1	5.15	5.57	##	##	0	0	***	**
$\frac{M}{100}$ Lactic acid				Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2
	9.00	0	1	6.84	7.08	##	##			—	—
	8.90	0.10	1	6.75	•	##	##			—	—
	8.75	0.25	1	6.53	6.86	##	##			—	—
	8.50	0.50	1	6.37	6.70	##	##	$4\frac{1}{2}$		—	—
	8.25	0.75	1	6.18	6.45	##	##	$1\frac{1}{2}$	3	*	*
	8.00	1.00	1	5.66	6.17	##	##	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**	*
	7.75	1.25	1	5.17	5.88	##	##	0	$\frac{1}{2}$	***	**
	7.50	1.50	1	4.76	5.58	##	##	0	0	***	***
	7.25	1.75	1	•	5.21	##	##	0	0	***	***

in order to make certain that the sperm agglutination in the solutions

of NaH_2PO_4 and Na_2HPO_4 is due to the H ion and not to the Na ion or PO_4 ion. As is shown in Table 3, the spermatozoa begin to agglutinate in small masses 3-8 hours after mixing the semen with the acid solution when the pH value is reduced to 6.48 or 6.41 in the case of hydrochloric acid, 6.48 or 6.26 in the case of sulphuric acid, 6.55 or 6.25 in the case of butyric acid and 6.45 or 6.37 in the case of lactic acid.

Agglutination begins earlier, and the agglutinated masses become larger, as the pH value decreases; when the pH value decreases below 5.32 or 5.00 in the case of hydrochloric acid, 5.48 or 5.32 in the case of sulphuric acid, $5.31 \rightarrow 5.43$ in the case of butyric acid and 5.58 or 5.17 in the case of lactic acid, all the spermatozoa agglutinate suddenly in large masses.

It is clear from the above that agglutination in the various acid solutions is in no way different from that in a NaH_2PO_4 solution, namely—agglutination never occurs at a pH value near the neutral point, but begins to occur at a pH value between 6.55 and 6.25, and the critical points of sudden agglutination lie between the pH values of 5.58 and of 5.00.

Considering these facts, we can say that the sperm agglutination in the NaH_2PO_4 solution is caused by the H ion, not by the Na ion or PO_4 ion. In alkaline solutions, however, the matter is quite different: a Na_2HPO_4 solution at a certain minimum concentration brings about agglutination, but in the solutions of NaOH and Na_2CO_3 there occurs no agglutination at any pH value (Tables 4 and 5).

Perhaps the ionic actions other than hydrogen ion may be the chief cause of the above facts.

Summarising the experimental results recorded above, we find that the hydrogen ion concentration stands in close relation to the agglutination of spermatozoa in any sort of reagent and without distinction of species; that the agglutination never occurs at a pH value near the neutral point, and that it occurs regularly on the acid side; that in an acid medium the spermatozoa agglutinate the more rapidly and intensively the more the hydrogen ion concentration increases.

TABLE 4.

Influence of the hydrogen ion concentration upon the agglutination of horse spermatozoa.

4. NaOH.

Composition of the fluids used			Mols of NaOH	pH values of the fluids used		Motility of sp. immediately after mixing		Aggl. of sp.	
Volume of dextrose solution	Volume of $\frac{M}{100}$ NaOH solution	Volume of sperm		Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2
cc	cc	cc							
9.00	0	1	0	•	7.19	##	##	—	—
8.90	0.10	1	1/10000	•	7.27	##	##	—	—
8.75	0.25	1	2.5/ „	•	•	##	##	—	—
8.50	0.50	1	5/ „	8.39	•	##	##	—	—
8.25	0.75	1	7.5/ „	•	•	##	##	—	—
8.00	1.00	1	1/1000	8.99	•	##	##	—	—
7.75	1.25	1	1.25/ „	•	•	##	##	—	—
7.50	1.50	1	1.5/ „	•	•	##	##	—	—
7.25	1.75	1	1.75/ „	•	•	##	##	—	—
7.00	2.00	1	2/ „	•	•	##	##	—	—
6.50	2.50	1	2.5/ „	•	•	+	##	—	—
6.00	3.00	1	3/ „	•	9.58	+	##	—	—
5.50	3.50	1	3.5/ „	•	•	+	##	—	—
5.00	4.00	1	4/ „	9.92	•	+	+	—	—

TABLE 5.

Influence of the hydrogen ion concentration upon the agglutination of horse spermatozoa.

5. Na_2CO_3 .

Composition of the fluids used			Mols of Na_2CO_3	pH values of the fluids used	Motility of sp. immediately after mixing	Aggl. of sp.
Volume of dextrose solution	Volume of $\frac{M}{10}$ Na_2CO_3 solution	Volume of sperm				
cc	cc	cc				
9.00	0	1	0	7.19	##	—
8.90	0.10	1	1/1000	8.42	##	—

8.75	0.25	1	2.5/1000	•	+	—
8.50	0.50	1	5/ „	•	+	—
8.25	0.75	1	7.5/ „	•	+	—
8.00	1.00	1	1/100	•	+	—
7.75	1.25	1	1.25/ „	10.00	+	—
7.50	1.50	1	1.5/ „	•	+	—
7.25	1.75	1	1.75/ „	•	+	—
7.00	2.00	1	2/ „	•	+	—
6.50	2.50	1	2.5/ „	•	+	—
6.00	3.00	1	3/ „	•	+	—
5.50	3.50	1	3.5/ „	•	+	—
5.00	4.00	1	4/ „	•	+	—
4.00	5.00	1	5/ „	10.37	+	—

On the alkaline side, however, agglutination occurs only in solutions of Na_2HPO_4 when their pH value increases above 8.3, but never in solutions of NaOH and Na_2CO_3 .

Even in the case of Na_2HPO_4 , the intensity of agglutination is far lower than in acid media. The cause of this may be attributed to the detrimental effect of alkaline solutions on the motility of the spermatozoa, because the motility of the latter is one of the most important factors for their agglutination, as will be described later.

The sperm agglutinations described above show a rosette form in which the spermatozoa appear agglutinated with their heads around one center, while their tails radiate in all directions, undulating with more or less movement. What characterizes this agglutination is the polarity exhibited by the spermatozoa.

2. Influence of the Hydrogen Ion Concentration upon the Mass-Coagulation of Spermatozoa

In the preceding chapter I described the agglutination of the spermatozoa as it occurs at a pH range not markedly impairing their

motility. When, however, the pH value decreases so much as to deprive them of their motility, agglutination appears under quite a different shape.

If, for instance, we examine the agglutination of the spermatozoa in McILLVAINE'S buffer solution at pH values ranging from 2.2 to 7.0 by adding 0.25 cc of horse semen to 5 cc each of the various concentration of the buffer, we find that, whereas at pH values lying between 6.4 and 5.0 the mode of agglutination is the same as seen in solutions of NaH_2PO_4 (though in the present case the intensity of agglutination is lower), at pH values below 3.6 this mode becomes quite different, namely that the spermatozoa lose their motility and agglutinate without polarity to form irregular masses of various size (Table 6).

TABLE 6.

Influence of the hydrogen ion concentration upon the mass-coagulation of horse spermatozoa.

pH values of the buffer solutions	Highest intensity of agglutination and mass-coagulation			Motility of sp. after mixture with solutions					
				At once		15 min.		30 min.	
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 2	Ex. 3
2.2	—	—	—	—	—	—
2.4	—	—	—	—	—	—
2.6	—	—	—	—	—	—
2.8	—	—	—	—	—	—
3.0	—	—	—	—	—	—
3.2	—	—	—	—	—	—
3.4	—	—	—	—	—	—
3.6	.	.	.	—	—	—	—	—	—
3.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.2	—	—	—	+	+	—	—	—	—
4.4	—	—	—	+	+	—	—	—	—
4.6	—	—	—	+	+	—	—	—	—

4.8	—	—	—	+	+	—	+	—	—
5.0	—	*	*	†	†	+	+	—	—
5.2	*	**	**	†	†	+	†	—	+
5.4	**	**	**	†	†	†	†	+	+
5.6	**	**	**	†	†	†	†	†	†
5.8	**	**	**	†	†	†	†	†	†
6.0	*	**	*	†	†	†	†	†	†
6.2	*	**	*	†	†	†	†	†	†
6.4	—	*	—	†	†	†	†	†	†
6.6	—	—	—	†	†	†	†	†	†
6.8	—	—	—	†	†	†	†	†	†
7.0	—	—	—	†	†	†	†	†	†

In this case the sperm suspension separates rapidly into agglutinated masses and clear fluid; as the former very soon sink to the bottom of the test tube, this process of agglutination may be observed not only microscopically, but even macroscopically.

These agglutinations are very similar in appearance to those which YAMANE (1921, Plate IV) obtained with horse semen in isotonic FeCl_3 solution.

In order to have a convenient name distinguishing this mode of agglutination from that described in the preceding chapter, I propose to call it "mass-coagulation" from now on.

This mass-coagulation occurs at pH values lying between 3.6 and 2.2 as shown above, and is most conspicuous and instantaneous at pH 3.0 or 2.8; also as regards the size of the coagulated masses, they are unusually large at this concentration.

It should be specially noted that there is a clear-cut gap between the pH values causing agglutination and those causing mass-coagulation; that is to say, at pH values between 5.0 (or 4.8) and 3.8 neither agglutination nor mass-coagulation appears, but the dead spermatozoa remain uniformly suspended in the medium.

McILLVAINE's buffer solution acts always detrimentally on the

motility of the spermatozoa at any pH value, even at the neutral point and on the alkaline side. In consequence the spermatozoa in this solution never exhibit the "most active motility," but at the best only "active motility." Also the duration of life of the spermatozoa is shortened in this solution. This tendency becomes more marked as the pH value decreases, and at the pH value of 4.0 the spermatozoa die immediately; even at the pH value of 5.0 they die within 30 minutes. This is perhaps due to the high osmotic pressure of McILLVAINE's buffer solution owing to its high molar concentration, and may also be due to the detrimental action of ions other than the hydrogen ions.

For the rabbit spermatozoa suspended in McILLVAINE's buffer solution, the pH range of agglutination and mass-coagulation is somewhat different from that for horse spermatozoa (Table 7).

TABLE 7.
Influence of the hydrogen ion concentration upon the mass-coagulation of rabbit spermatozoa.

pH values of the buffer solutions	Motility of sp. im- mediately after mixing	Highest intensity of aggl. and mass-coagul.			Life duration of sp.		
		Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3
2.2	—	min. 0	min. 0	min. 0
2.4	—	0	0	0
2.6	—	0	0	0
2.8	—	0	0	0
3.0	—	0	0	0
3.2	+	0	5	10
3.4	+	0	5	10
3.6	⦿	10-15	10	15
3.8	⦿	30	30	30
4.0	⦿	60	30	60
4.2	⦿	90	60	60
4.4	⦿	150	60	60
4.6	⦿	150	120	90

4.8	‡‡	***	***	***	180	300	120
5.0	‡‡	***	***	***	180	360<	180
5.2	‡‡	***	***	**	420	"	210
5.4	‡‡	**	**	**	420<	"	240<
5.6	‡‡	**	**	*	"	"	"
5.8	‡‡	*	*	*	"	"	"
6.0	‡‡	—	*	—	"	"	"
6.2	‡‡	—	—	—	"	"	"
6.4	‡‡	—	—	—	"	"	"
6.6	‡‡	—	—	—	"	"	"
6.8	‡‡	—	—	—	"	"	"
7.0	‡‡	—	—	—	"	"	"

Thus the rabbit spermatozoa agglutinate at any pH range between 6.0 (or 5.8) and 3.6 (Pl. I, Fig. 1), in other words the pH range of agglutination is far wider, and also the intensity higher, than in the case of horse spermatozoa.

The pH range of the mass-coagulation is also a little wider than that of the horse spermatozoa and extends from 3.8 to 2.2. The most intensive mass-coagulation occurs at the pH value of 3.0 or 3.2 (Pl. I, Fig. 4).

Special attention must be drawn to the fact that in this case there is no gap between the pH range of agglutination and that of mass-coagulation. These two ranges meet at the pH values of 3.6 and 3.8: at 3.6 mass-coagulation predominates over agglutination (Pl. I, Fig. 3), at 3.8 the two appear in equal intensity (Pl. I, Fig. 2).

Here it is also to be noted that the rabbit spermatozoa possess a stronger resistance against the detrimental action of McILLVAINE's buffer solution than the horse spermatozoa; even at the pH value of 4.0, which is the lethal point for horse spermatozoa, the rabbit spermatozoa are very motile, and survive for 30-60 minutes.

3. The Nature of the Agglutination and Mass-Coagulation of Spermatozoa Influenced by the Hydrogen Ion Concentration

As described in the previous chapter, the horse and the rabbit spermatozoa show agglutination or mass-coagulation according to the hydrogen ion concentration. These two phenomena can be distinguished by the following points.

i) Microscopical Appearance

In the case of agglutination, the spermatozoa agglutinate with their heads attached in one center and their tails radiating with more or less movement, so as to show a rosette form. In other words, they agglutinate with polarity. The number of spermatozoa taking part in one agglutination may be 2 or 3 in the case of a small mass, or 5-10 in that of a large mass; during the first stages of the agglutination they always retain their vitality, viz., show motility.

In the case of mass-coagulation, on the other hand, a great number of spermatozoa flock together into one irregular mass without polarity or other regular arrangement, and the spermatozoa lose their vitality at the very beginning of the mass-coagulation, and, accordingly, show no motility.

ii) Macroscopical Appearance

Owing to the smallness of the agglutinated masses, in general, the sperm suspension stands milky white for a long time in the case of agglutination; contrary to this, in the case of mass-coagulation, especially of the rabbit spermatozoa, the coagulated masses are so large as to be seen macroscopically, and the coagulated masses sink rapidly in the bottom of the test tube and leave the supernatant fluid clear.

iii) Reversibility

As YAMANE (1921) has already reported, the agglutinated masses can not be broken up by shaking, but when the motility of the spermatozoa diminishes, the clumps gradually disrupt into smaller masses and finally into individuals again. Agglutination, thus, is a reversible phenomenon. The coagulated masses of mass-coagulation, on the contrary, never disrupt into smaller masses as long as they are left untouched. Mass-coagulation, thus, is a irreversible phenomenon.

Considering these facts, it might seem as if agglutination and mass-coagulation were substantially different from each other; in point of fact, however, they are fundamentally the same and differ only in intensity.

This view is born out by two facts previously mentioned, viz.: i) the hydrogen ion concentration at which agglutination occurs always lies at a higher pH range than those for mass-coagulation, and ii) there is sometimes a clear cut gap between the pH range of agglutination and that of mass-coagulation, for example, in the case of horse spermatozoa; on the other hand, in the case of rabbit spermatozoa, the two pH ranges are continuous, merging without any gap into each other, and there exist intermediate pH values (i. e., pH 3.6 and pH 3.8) at which both phenomena take place simultaneously.

There arises then the question: If agglutination and mass-coagulation are fundamentally the same thing, what is it that brings about those three marked differences? I incline to the opinion that there is only one factor that leads to such differences, viz., the motility of the spermatozoa. This view will be clearly proved by the following experiments.

EXPERIMENT 1

If horse spermatozoa were kept at room temperature till they were completely dead, and then were added to McILLVAINE's buffer solution, only mass-coagulation occurred at any pH value lower than

pH 4.0 or pH 3.8, as in the case of living spermatozoa, but at pH values higher than pH 4.0 or pH 3.8 no agglutination occurred even at the pH values at which living spermatozoa agglutinated.

Also in the case of dead rabbit spermatozoa there occurred mass-coagulation at any pH value lower than 4.4 or 4.2; but at no pH value was there any agglutination (Table 8).

TABLE 8.
Influence of the hydrogen ion concentration upon the
agglutination of dead spermatozoa.

pH values of the buffer solutions	Highest intensity of mass-coagulation					
	Horse			Rabbit		
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3
2.2
2.4
2.6
2.8
3.0
3.2
3.4
3.6
3.8
4.0	—	—
4.2	—	—	—	.	.	.
4.4	—	—	—	—	.	—
4.6	—	—	—	—	—	—
4.8	—	—	—	—	—	—
5.0	—	—	—	—	—	—
5.2	—	—	—	—	—	—
5.4	—	—	—	—	—	—
5.6	—	—	—	—	—	—
5.8	—	—	—	—	—	—
6.0	—	—	—	—	—	—
6.2	—	—	—	—	—	—
6.4	—	—	—	—	—	—
6.6	—	—	—	—	—	—
6.8	—	—	—	—	—	—
7.0	—	—	—	—	—	—

As has been described previously (Table 7), agglutination of the living rabbit spermatozoa occurs at the pH values above 3.8, and just at this point (and also at 3.6) both agglutination and mass-coagulation take place at the same time, but dead spermatozoa did not agglutinate at this latter pH value. Shortly speaking, mass-coagulation always occurs with the same intensity at the same pH value, regardless of the vitality of the spermatozoa, but agglutination never occurs with dead spermatozoa. Is it, then, vitality itself, or rather motility, one of the manifestation of vitality, that governs the agglutination of the spermatozoa?

The following experiments may serve as one of the keys to solve this question.

EXPERIMENT 2

It is well known that temperature controls the motility of the spermatozoa in a remarkable degree. For instance, some of my experiments have shown that the rabbit spermatozoa display their "most active" motility at a temperature of 30°C, and that their motility decreases with the temperature, to be lost when the temperature falls to 4°-1°C. But the spermatozoa which thus have lost their motility begin to move actively again when the temperature is raised. This means that, though the spermatozoa lose their motility at a temperature of 4°-1°C, they do not lose their vitality at the same time.

If, in consideration of these facts, to McILLVAINE's buffer solution of pH 4.2 and 4.4, and of the temperatures 37°, 20°, 10° and 2°-1°C respectively, rabbit sperm was added, marked agglutination resulted with considerable rapidity at the temperatures of 37° and 20°C, while at 10°C both intensity and rapidity were lower, and at 2°-1°C agglutination was entirely absent (Table 9).

But even in these reagents of low temperature of 4°-1°C the spermatozoa showed marked agglutination after recovering their motility when the temperature was raised to 37°C.

From the above we must conclude that the factor governing the

TABLE 9.

Influence of the temperature upon the agglutination
of rabbit spermatozoa.

Temperature	Motility of sp. immediately after mixing		Agglutination of spermatozoa					
			Time till aggl. sets in		Time till highest intensity is reached		Highest intensity	
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2
37°C	##	##	min. 0	min. 0	min. 5	min. 5	***	***
20°C	+	+	0	0	5	10	***	***
10°C	+	+	10	20	30	40	**	**
1°-2°C	—	—	—	—	—	—	—	—

agglutination of the spermatozoa is their motility, not their vitality.

This view will be more strongly supported by the following series of experiments in which the spermatozoa were treated with CO_2 .

EXPERIMENT 3

When CO_2 gas was introduced into the ENGELMANN gas chamber in which the rabbit spermatozoa were kept suspended in glucose-phosphate-buffer solution, there occurred no change of the pH value owing to the buffer action of the solution, and, accordingly, there resulted neither agglutination nor mass-coagulation of the spermatozoa. But the spermatozoa were quickly paralyzed by CO_2 and, on that account, lost their motility. If, in this case, pure glucose solution (4%) was used in place of the glucose-phosphate-buffer solution, the spermatozoa at once showed marked mass-coagulation. This is due to the decrease of the hydrogen ion concentration of the solution; if we measure the pH value using brom cresol green as indicator, we find that the pH value decreases to 4.8.¹⁾

- 1) While normally the mass-coagulation of the dead spermatozoa in McILLVAINE's buffer solution sets in at a pH value of 4.4 or 4.2, as shown in Table 8, it begins, under CO_2 treatment, at pH 4.8. In the former case, the phenomenon may be ascribable to the combined effect, on the one side, of the hydrogen ion concentration, and, on the other side, of the other ions that are present in the McILLVAINE buffer solution.

As may be seen from Table 7, the motile spermatozoa at this pH value show agglutination but no mass-coagulation. This leads to the conclusion that only mass-coagulation will result, when the spermatozoa are completely deprived of their motility, and that agglutination can only occur as long as their motility is normal, or little impaired.

Summerising these three experimental results, it seems certain that agglutination is mass-coagulation accompanied by motility, and, reversely, that mass-coagulation is agglutination not accompanied by motility. In other words, agglutination and mass-coagulation do not materially differ from each other, and are substantially the same phenomenon as acid agglutination.

My final conclusion is that agglutination and mass-coagulation of spermatozoa will result when the pH values reach the neighbourhood of the iso-electric points of the colloids of which the spermatozoa are constituted.

According to the experimental results (Tables 2 and 6), the iso-electric points of the horse spermatozoa exist in two points on the acid side, viz., pH 3.0-2.8 and pH 5.6-5.8, and one more point on the alkaline side situated above pH 8.3,¹⁾ three points altogether.

Especially, at pH values near 3.0-2.8 occurs mass-coagulation only, and at pH values near 5.6-5.8 and above 8.3 agglutination only.

The pH range around the pH value of 3.0 agrees very nearly with the zone of flocculation of nucleic acid, chromatin, and lecithin (MICHAELIS and DAVIDSON 1912, FEINSCHMIDT 1912, PISCHINGER 1927); it seems therefore that mass-coagulation takes place when the pH value reaches the zone of flocculation of nucleic acid, the main constituent of the head of the spermatozoa, and of lecithin, one of the constituents of their tail (MIESCHER 1874, 1897,²⁾ MATHEWS 1897, STEUDEL 1911, BURIAN 1904, 1906).

1) I found it impossible to increase the pH value of the solutions above this limit without arresting the motility of the spermatozoa, our experiments were made only with solutions whose pH values were below 8.52 resp. 8.61.

Thus the iso-electric point on the alkaline side could not be determined.

2) Cited by BURIAN 1904, 1906.

As the spermatozoa are no longer motile, on account of their immediate death at pH values around 3.0, as referred to above, it is impossible for them to show polarity which presupposes forward movement. So they agglomerate into very irregular masses, in other words, they exhibit mass-coagulation. On the other hand, the pH range around the pH value of 5.6 or 5.8 nearly coincides with the zone of flocculation of albumin and globulin (MICHAELIS and RONA 1910, RONA and MICHAELIS 1910, MICHAELIS and DAVIDSOHN 1911, MICHAELIS and NAKASIMA 1923, SÖRENSEN 1918, CSONKA and MURPHY and JONES 1926) and is clearly distinct from the pH range of mass-coagulation (Table 6), so that agglutination may be considered to be caused by the acid-agglutination of albumin and globulin which are among the main constituents of the spermatozoa.

We know little about the proteins of the mammalian spermatozoa, but if the assumption is granted that the horse spermatozoa contain the same substances as the salmon, herring and human spermatozoa, which have been studied by MIESCHER (salmon, 1897),¹⁾ MATHEWS (herring, 1897), STEUDEL (herring, 1911) and HOFMANN (man),²⁾ it seems proper to conclude that the agglutination in the pH values above 8.3 takes place when the pH value reaches the zone of flocculation of protamine, because the iso-electric point of protamine lies between pH 9.72 and pH 12.42 (S. MIYAKE 1927).

On the alkaline side and within the pH range of 5.0-6.4 the motility of the spermatozoa is not checked by the hydrogen ion concentration, so that the spermatozoa, by colliding with each other in their forward movement, increase the chances of agglutination. Such collisions of spermatozoa may take place in three ways, either head to head, or head to tail, or tail to tail.

In the second and third cases, however, if the intensity of acid agglutination is low, the spermatozoa even if they come in close contact during their forward movement, will never adhere to each other,

1) Cited by STEUDEL 1191.

2) Cited by HAMMARSTEN 1926.

owing to the vibrations of their tails, and accordingly there will be no agglutination.

In the first case, on the other hand, agglutination may result when the oval shaped, flattened heads of the spermatozoa are in touch with each other in a medium whose pH value closely approaches the iso-electric point of the colloids of which the spermatozoa consist.

In this case the agglutinated mass can not be broken up by the vibrations of the tails of the spermatozoa.

On one side the heads adhere to each other with a comparatively large surface, and the movements of the tails are not powerful enough to overcome this adhesion. As it is, it seems more probable that the movements of the tails contribute more towards pressing the heads against each other than to separate them. The constant movement of the tails, however, prevents them from sticking together, and the natural result is formation of a rosette, with the agglutinated heads as a center, and the tails radiating in all directions. This reasoning makes it clear why agglutination occurs only when motility is preserved.

The rabbit spermatozoa behave somewhat differently from the horse spermatozoa (Tables 6 and 7). With the rabbit spermatozoa, mass-coagulation takes place within a pH range extending over the pH values below 3.8, and the iso-electric point is 3.0 or 3.2; agglutination, on the other hand, occurs at pH values between 3.6 and 6.0. The two ranges, therefore, overlap to a certain extent, and at pH values of 3.8 and 3.6 both agglutination and mass-coagulation occur. The iso-electric point on the alkaline side seems to lie at a certain pH value above 8.23. That is to say, while there are three iso-electric points also in the case of the rabbit spermatozoa, the two zones of flocculation, within which the two iso-electric points on the acid side are situated, partly cover each other, and there is no clear-cut gap between them. Moreover, it is difficult to determine exactly the iso-electric point in the pH range of agglutination.

This difference between the two animals is perhaps due to the distance that separates them in the zoological system. This is further

confirmed by the observation that a similar difference obtains also with the sperm sera of the two animals. Thus, for instance, it has been ascertained from my experiments that the horse sperm serum has two discontinuous zones of flocculation, one extending over the pH range of 2.2-3.8, the other over 4.8-7.4, and that flocculation lacks entirely at the pH range of 4.0-4.6 (Table 10).

TABLE 10.
Influence of the hydrogen ion concentration upon the
flocculation of the sperm serum.

1. Horse sperm serum.

pH values of the buffer solutions	Flocculation of the sperm serum									
	Intensity immediately after mixing					Highest intensity				
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 4	Ex. 5	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 4	Ex. 5
2.2	-	-	+	-	-	+	-	+	-	-
2.4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2.6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2.8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3.0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3.2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3.4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3.6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3.8	+	-	-	-	-	+	-	+	+	+
4.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4.2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4.6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4.8	-	-	-	-	-	+	+	-	+	+
5.0	-	-	-	-	-	+	+	-	+	+
5.2	-	-	-	-	-	+	+	-	+	+
5.4	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+
5.6	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+
5.8	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+

6.0	—	—	—	—	—	‡	‡	+	‡	‡
6.2	—	—	—	—	—	‡	‡	+	‡	‡
6.4	—	—	—	—	—	‡	‡	+	‡	‡
6.6	—	—	—	—	—	‡	‡	+	‡	‡
6.8	—	—	—	—	—	‡	‡	+	‡	‡
7.0	—	—	—	—	—	‡	‡	+	‡	‡
7.2	—	—	—	—	—	‡	‡	+	‡	‡
7.4	—	—	—	—	—	‡	‡	+	‡	‡

The rabbit sperm serum, on the other hand, has one large continuous zone of flocculation which extends from pH 2.2 to pH 6.0 (Table 11).

TABLE 11.

Influence of the hydrogen ion concentration upon the flocculation of the sperm serum.

2. Rabbit sperm serum.

pH values of the buffer solutions	Flocculation of the sperm serum					
	Intensity immediately after mixing			Highest intensity		
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3
2.2	‡	‡	+	‡	‡	‡
2.4	‡	‡	‡	‡	‡	‡
2.6	‡	‡	‡	‡	‡	‡
2.8	‡	‡	‡	‡	‡	‡
3.0	‡	‡	‡	‡	‡	‡
3.2	‡	‡	‡	‡	‡	‡
3.4	‡	‡	‡	‡	‡	‡
3.6	‡	‡	‡	‡	‡	‡
3.8	‡	‡	‡	‡	‡	‡
4.0	‡	‡	‡	‡	‡	‡
4.2	‡	‡	+	‡	‡	‡
4.4	‡	‡	+	‡	‡	‡
4.6	‡	‡	+	‡	‡	‡

pH values of the buffer solutions	Flocculation of the sperm serum					
	Intensity immediately after mixing			Highest intensity		
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3
4.8	+	+	+	##	##	##
5.0	+	+	+	+	+	+
5.2	-	+	-	##	##	##
5.4	-	-	-	+	+	+
5.6	-	-	-	+	+	+
5.8	-	-	-	+	+	+
6.0	-	-	-	+	+	+
6.2	-	-	-	-	-	-
6.4	-	-	-	-	-	-
6.6	-	-	-	-	-	-
6.8	-	-	-	-	-	-
7.0	-	-	-	-	-	-
7.2	-	-	-	-	-	-
7.4	-	-	-	-	-	-

Further it must be remembered that the iso-electric points of the spermatozoa do not perfectly coincide with those of nucleic acid, albumin, globulin, and perhaps also protamine and lecithin, of which the spermatozoa are composed. This is only due to the fact that the spermatozoon is a compound of various proteins which have different iso-electric points,

As MICHAELIS and DAVIDSON (1912) found, the iso-electric point of a mixture of two amphoteric colloids lies usually between the iso-electric points of the two components, and, when the proportion of one component is exceedingly high, the iso-electric point of the mixture of colloids approaches that of the excessive component.

II. AGGLUTINATION OF SPERMATOZOA AS INFLUENCED BY THE SECRETIONS OF THE FEMALE GENITAL TRACT AND OTHER BODY FLUIDS

1. Agglutination of Rabbit Spermatozoa in the Genital Tract of the Female Rabbit

Agglutination and mass-coagulation of the spermatozoa of which I treated in the last chapter, are, after all, nothing else but colloidal flocculation.

As the writer found, the spermatozoa inseminated into the vagina of the rabbit, whether by normal copulation or by artificial insemination, agglutinate within 10 minutes after insemination, and, in appearance, this agglutination does not at all differ from acid-agglutination¹⁾ (Pl. II, Fig. 5).

The nature of this agglutination, however, seems to be quite different: it is a vital reaction while acid-agglutination is a purely physico-chemical reaction.

I shall describe this phenomenon in the first place, and then study its nature analytically.

i) Agglutination of Spermatozoa Ejaculated into the Vagina in Normal Copulation

For recovering the ejaculated sperm I use a NÉLATON catheter, 20 cm in length and 0.2 cm in diameter, attached to the muzzle of a 1 cc glass syringe, with which the sperm is gently sucked up from the vagina.

If we examine a drop of the recovered sperm under the microscope, we find the spermatozoa agglutinated, with their heads attached to one another in one central mass, and their tails radiating in all

1) The substance of this article has been preliminarily reported in the Jour. Soc. Trop. Agr., Vol. 4, No. 3, pp. 227-234, 1932.

directions with lively movement. In appearance these agglutinations conform with those observed in acid-agglutination as described in the preceding chapter.

This phenomenon is by no means an exception occurring under special conditions or in certain individuals only, but is to be observed regularly and universally, under all conditions and in every individual, after normal copulation.

In sperm taken from the vagina 10 minutes after copulation, the agglutinations consist at first of only two or three spermatozoa, but even on the slide they become gradually larger and finally comprise 10 spermatozoa or thereabouts. In sperm sucked up 15 minutes after normal copulation almost all the spermatozoa are usually already agglutinated into large masses. This process is clearly demonstrated in the experimental results recorded in Tables 12 and 13.

TABLE 12.

Agglutination of ejaculated spermatozoa in the vagina after normal copulation.

No. of femal rabbit	Interval between copulation and examination	Intensity of agglutination	
		Immediately after recovery of sperm from vagina	Highest intensity
No. 10	10 minutes	**	***
No. 17	" "	**	***
No. 2	" "	**	***
No. 9	" "	**	***
No. 13	" "	**	***
No. 9	" "	**	***
No. 3	" "	**	**
No. 23	" "	**	**
No. 6	" "	*	**
No. 3	" "	*	**
No. 21	15 "	***	***
No. 6	30 "	***	***
No. 13	1 hour	***	***

No. 2	1	”	***	***
No. 1	2	hours	***	***
No. 1	3	”	***	***
No. 15	5	”	**	**
No. 23	8	”	**	**
No. 39	10½	”	***	***

When more than 8 hours have elapsed, the adhesion of the heads becomes looser and the figure of the agglutinations becomes irregular. After the lapse of 24 hours or more, it is scarcely possible to find agglutinated masses and living spermatozoa, and the greater part of the spermatozoa die off before that time. Therefore, also in this case, agglutination may be regarded as a reversible phenomenon.

After the lapse of 50 hours, scarcely any normal spermatozoa can be found, and there remain only isolated heads and tails scattered here and there.

The thing to be principally noticed here is the great number of pseudo-eosinophile leucocytes, together with a few plasma cells, monocytes and lymphocytes, that appear in the sperm recovered from the vagina (Pl. II, Fig. 6). They are most numerous 2 hours or so after normal copulation, and at that time the sperm presents the appearance of a suspension of leucocytes. Especially the pseudo-eosinophile leucocytes are gathering in great numbers about the agglutinated masses of spermatozoa or about the moving individuals, and some of them may be seen phagocytizing a spermatozoon or catching the head of one by sending out their pseudopodia (Pl. II, Fig. 7).

After the lapse of 24-50 hours, however, the number of leucocytes diminishes, and many autolysing individuals may be found (Table 13).

That the material cause of the intra-vaginal sperm agglutination exists not in the sperm itself but in the vagina, can be proved by the following experiments.

TABLE 13.
Agglutination of spermatozoa in the vagina and
appearance of leucocytes.

Interval between copulation and examination	No. of female rabbit	Intensity of aggl.	Number of leucocytes	Motility of sp.
10 min.	No. 1	+++	+	++
	No. 1	++	+	++
	No. 2	+	+	++
	No. 6	++	+	++
	No. 13	+	+	++
	No. 13	++	+	++
15 "	No. 2	+	+	++
	No. 13	+	+	++
	No. 21	++	++	++
30 "	No. 2	+	++	++
	No. 6	++	++	++
	No. 13	+	+	++
1 hour	No. 2	++	++	++
	No. 13	+	+	++
2 hours	No. 1	++	++	++
	No. 2	++	++	++
	No. 13	++	++	++
3 "	No. 1	++	++	-
	No. 6	++	++	-
4 "	No. 2	++	++	+
	No. 13	++	++	+
5 "	No. 3	+++	++	+
	No. 13	+++	++	+
	No. 15	++	+	++

	No. 2	***	##	+
8 "	No. 13	**	##	+
	No. 15	上	##	+
10½ "	No. 39	***	##	+
18 "	No. 41	—	##	—
	No. 1	—	##	—
24 "	No. 2	—	+	+
	No. 13	—	+	—
	No. 40	—	+	+
50 "	No. 1	—	+	—

ii) Agglutination of Spermatozoa Inseminated Artificially into the Vagina

I prepare an "artificial-glucose-sperm," so called by me, by cutting the *Cauda epididymidis* in small pieces, and adding glucose-phosphate-buffer solution (10 cc 1% H_3PO_4 + 17.2 cc 1% NaOH + 72.8 cc aq. dest. + 4 g anhyd. glucose).

By filtering through a silk-cloth the spermatozoa are separated from the tissues. In this preparation the spermatozoa move most actively and keep alive for a considerable time (YAMANE and KATO, 1928); yet they never agglutinate even if left for a long time.

If such an artificial glucose-sperm is inseminated into the vagina of a rabbit in heat by means of a NÉLATON catheter, the spermatozoa show marked agglutination already 15 minutes after insemination as shown in Table 14.

From this it is clear that the factor that agglutinates the spermatozoa exists not in the body of the male but in that of the female.

Further it must be remembered that the pH value of the artificial-glucose-sperm recovered from the vagina is 7.4 or 7.5 (Table 14)

TABLE 14.
Agglutination of spermatozoa from the *Cauda epididymidis* in the vagina.

No. of female rabbit	Interval between injection of artificial-glucose-sperm and examination	Intensity of aggl.	pH values of the artif.-glucose-sperm recovered from the vagina
No. 4	15 minutes	***	7.5
No. 20	" "	***	7.4
No. 21	" "	***	7.4

and is outside the pH range of the previously described acid-agglutination. Therefore it must be inferred that the agglutination in this case is not identical with acid-agglutination.

iii) Agglutination in the Test Tube of Spermatozoa
Ejaculated into the Vagina

Considering the fact that agglutination of the spermatozoa occurs both in the normal sperm and the artificial-glucose-sperm when introduced into the vagina, there can be no doubt that the factor that causes sperm agglutination exists in the female body.

Now, if the ejaculated sperm, after recovery from the vagina soon after the normal copulation, is left standing in the test tube undisturbed, the spermatozoa, which are at first swimming freely about, gradually begin to agglutinate, until finally all the spermatozoa in the whole microscopical field enter into agglutination.

From this it becomes clear that the factor that agglutinates the spermatozoa is present in the vagina soon after copulation.

iv) Agglutination of Spermatozoa in Uterus and Oviducts

For the purpose of verifying the condition of the spermatozoa in vagina, uterus, and oviducts the females were killed by the injection of air into the auricular vein $\frac{1}{2}$, 1, 5, $10\frac{1}{2}$, 18, resp. 24 hours after copulation. After incising the vagina and the uterus, the mucus was

scraped off with a platinum loop, and the inner surface of these organs thoroughly washed with glucose-phosphate-buffer solution; both the mucus and the washing fluid were collected, and examined under the microscope.

Both oviducts were cut off from ovary and uterus, divided into two equal lengths, and each half perfused from the proximal end with the glucose-phosphate-buffer solution; the collected fluid was likewise examined microscopically.

I had some doubts whether the agglutinated spermatozoa would not be mechanically separated during perfusion, and it seemed desirable to settle this point before-hand. With this end in view I sent some artificial-glucose-sperm, in which agglutinated spermatozoa were suspended, through the oviducts, and could in this way ascertain the stability of the agglutinated masses.

As my experiments showed, spermatozoa cannot be found in the uterus and the oviducts as early as 30 minutes after copulation, but may be found there after the lapse of 1 hour or more; see Table 15.

TABLE 15.

Number of spermatozoa, intensity of agglutination and appearance of leucocytes in uterus and oviducts, at various periods after normal copulation.

No. of female rabbit			No. 50	No. 45	No. 48	No. 53	No. 39	No. 41	No. 40	
Interval between copulation and examination			$\frac{1}{2}$ h	1 h	1 h	5 h	10 $\frac{1}{2}$ h	18 h	24 h	
Oviducts	Right	Anterior half	Number of sp.	—	—	very few	very few	very few	—	very few
			Intensity of aggl.	—	—	—	—	—	—	—
		Posterior half	Number of sp.	—	—	very few	very few	few	—	very few
			Intensity of aggl.	—	—	—	—	—	—	—
	Left	Anterior half	Number of sp.	—	—	very few	—	very few	—	—
			Intensity of aggl.	—	—	—	—	—	—	—
Posterior half		Number of sp.	—	—	very few	—	few	—	very few	
		Intensity of aggl.	—	—	*	—	—	—	—	

No. of female rabbit			No. 50	No. 45	No. 48	No. 53	No. 39	No. 41	No. 40	
Interval between copulation and examination			$\frac{1}{2}$ h	1 h	1 h	5 h	10 $\frac{1}{2}$ h	18 h	24 h	
Uterus	Right	Anterior half	Number of sp.	—	—	very few	few	few	—	few
			Intensity of aggl.	—	—	*	**	**	—	—
		Posterior half	Number of sp.	—	very few	very few	few	few	—	few
			Intensity of aggl.	—	—	*	**	**	—	—
	Left	Anterior half	Number of sp.	—	—	very few	few	few	—	few
			Intensity of aggl.	—	—	*	**	**	—	—
		Posterior half	Number of sp.	—	—	very few	few	few	—	few
			Intensity of aggl.	—	—	*	**	**	—	—
Vagina	Number of sp.	great many	great many	great many	great many	great many	few	few		
	Intensity of aggl.	***	***	***	***	***	—	*		
Number of leucocytes	Oviducts	—	—	—	—	—	—			
	Uterus	—	—	—	few	few	few	—		
	Vagina	many	many	many	great many	great many	great many	few		

Though at first only a few spermatozoa can be seen in the uterus, their number increases after the lapse of 5 hours or more. In the oviducts the number of spermatozoa is generally small, but increases somewhat in the distal half after 10 hours or more. Similarly the agglutinated masses in the uterus are at first scarce, but after 5-10 hours or more they become fairly abundant; also a few leucocytes appear in the uterus after 5 hours or more, but neither agglutinated masses nor leucocytes can be found in the oviducts.

All this is highly interesting in regard to the physiology of reproduction of the rabbit, since it shows that the most active spermatozoa rapidly ascend to the uterus and from there reach the oviducts, while the others are agglutinated during their stay in either the vagina or the uterus by the sperm agglutinating substance which is always present in vagina and uterus, and finally disappear in consequence of auto-

lysis or phagocytosis by the leucocytes which appear not long after copulation.

That the spermatozoa of the rabbit can reach the oviducts in short time is well known from long before; so it has been stated by BISCHOFF and LEUCKART¹⁾ that the spermatozoa reach the middle region of the oviducts in 15 minutes after copulation, and further by HEAPE (1905,²⁾ and PARKER (1931) that they reach the infundibula of the oviducts in 4 hours (HEAPE) or even 3 Hours (PARKER) after copulation. These statements agree fairly well with my own observations.

v) Influence of the Vaginal Washings Upon the Agglutination of Spermatozoa

2-6 cc of glucose-phosphate-buffer solution were injected into the vagina by means of a catheter and withdrawn again after the lapse of 2-5 minutes. The viscous fluid so obtained must be regarded as a mixture of vaginal mucus, uterus secretion, and glucose-phosphate-buffer solution. To have a short name for this fluid, I call it "Vaginal Washings."

When 2 drops of artificial-glucose-sperm are added to such vaginal washings, the spermatozoa begin to agglutinate already 10 minutes later, as is shown in Table 16. This suggests the presence of a powerful sperm-agglutinating substance in the vaginal washings regardless whether the rabbit is in heat or not.

Further, sperm agglutination of the same intensity was observed in the washings from the vagina of an adolescent rabbit, though I have so far examined one case only (Table 16).

By electrometrical measurement in the MICHAELIS U tube I found that the pH values, of the vaginal washings as well as of the sperm recovered from the vagina, lie between 7.2 and 7.38 (Table 26). These high values make it quite clear that the cause of the sperm

1) Cited by HOEHNE and BEHNE 1914.

2) Cited by PARKER 1931.

agglutination is not the acid reaction of the secretions from the accessory organs of either sex.

TABLE 16.

Influence of the vaginal washings upon the agglutination of spermatozoa.

Vaginal washings used	No. of female rabbit	Agglutination of sp.		Motility of sp. immediately after mixing
		Time till aggl. sets in	Highest intensity	
Vaginal washings recovered from vagina of rabbit in heat	No. 2	10 minutes	++++	+++
	No. 3	" "	++++	+++
	No. 4	" "	++++	+++
	No. 5	" "	++++	+++
	No. 6	" "	++++	+++
	No. 7	" "	++++	+++
	No. 8	" "	++++	+++
	No. 11	" "	++++	+++
	No. 13	" "	++++	+++
	No. 18	" "	++++	+++
	No. 19	" "	++++	+++
	No. 20	" "	++++	+++
	No. 20, 21	" "	++++	+++
	No. 21	" "	++++	+++
	No. 21	" "	++++	+++
	No. 25	" "	++++	+++
Vaginal washings recovered from vagina of rabbit not in heat	No. 12	" "	++++	+++
	No. 12	" "	++++	+++
	No. 22	30 "	++	++
	No. 24	10 "	++++	+++
Vaginal washings recovered from vagina of virgin rabbit		" "	++++	+++

vi) Influence of the Mucus of Uterus and Oviducts
Upon the Agglutination of Spermatozoa

For the purpose of ascertaining whether the substance that causes the agglutination of spermatozoa is contained in the secretions of the uterus and the oviducts, I examined the agglutination of spermatozoa by adding artificial-glucose.-sperm to the mucous solutions obtained by washing the incised uterus or perfusing the oviducts from end to end with glucose-phosphate-buffer solution.

The spermatozoa began to agglutinate with strong movement as soon as the sperm suspension was added to these mucous solutions and finally showed the most intense agglutination (Pl. III, Fig. 8).

Therefore, it is clear that the factor that induces the agglutination of spermatozoa is contained in the secretions of the uterus as well as the oviducts (Table 17).

TABLE 17.

Influence of the mucus of uterus and oviducts upon
the agglutination of spermatozoa.

Mucus used	No. of experiment	Agglutination of sp.		pH values of the fluids used	Motility of sp. immediately after mixing
		Time till aggl. sets in	Highest intensity		
Mucus of uterus	Ex. 1	0 ^h	***	7.0	##
	Ex. 2	0	***	7.0	##
Mucus of oviducts	Ex. 1	0	***	7.0	##
	Ex. 2	0	***	6.9	##
	Ex. 3	$\frac{1}{2}$	***	7.0	##
	Ex. 4	0	***	7.0	##
	Ex. 5	0	***	7.1	##
	Ex. 6	0	***	7.0	##

Summarising the facts noted above, we may state: the spermatozoa of both ejaculated and artificially inseminated sperm are always agglutinated by the secretions of the vagina and the uterus soon after

copulation or artificial insemination ; in the oviducts, however, no agglutination is to be seen though their secretion too has the power of agglutinating the spermatozoa ; this, at the first glance, appears rather strange, but may be explained by the fact that only a scanty number of spermatozoa reach the oviducts, and that therefore their chances of coming in contact and sticking together are scarce.

2. Agglutination of the Rabbit Spermatozoa in the Secretions or Extracts of the Genital Organs of the Male Rabbit

When the secretions or extracts of the male genital organs of the rabbit are added to the sperm suspension, some of them agglutinate the spermatozoa, others do not. According to Table 18, the extract of the testis and the secretion of the *Vesicula seminalis* have the power of agglutinating the spermatozoa, but the extract of the epididymis¹⁾ and the secretion of the *Glandula prostatica* decidedly lack that power.

TABLE 18.

Influence of the secretions and extracts of the genital organs of the rabbit upon the agglutination of spermatozoa.

Secretions or extracts	No. of experiment	Agglutination of sp.		pH values of the fluids used	Motility of sp. immediately after mixing
		Time till aggl. sets in	Highest intensity		
Secretion of <i>Vesicula seminalis</i>	Ex. 1	1	***	7.1	##
	Ex. 2	0	**	7.0	##
	Ex. 3	1	***	7.0	##
	Ex. 4		—	6.9	##
	Ex. 5	0	**	7.1	##
	Ex. 6	0	***	7.1	##
	Ex. 7	0	***	7.1	##
	Ex. 8	0	***	7.1	##

¹⁾ As has been shown in page 35, the extract of the *Cauda epididymidis* lack the power of agglutinating the rabbit spermatozoa.

Secretion of <i>Gl.</i> <i>prostata</i>	Ex. 1		—	7.0	##
	Ex. 2		—	7.0	##
	Ex. 3		—	7.0	##
	Ex. 4		—	7.0	##
	Ex. 5		—	6.8	##
	Ex. 6		—	7.1	##
	Ex. 7		—	7.1	##
	Ex. 8		—	7.0	##
	Ex. 9		—	6.9	##
	Ex. 10		—	7.1	##
	Ex. 11		—	7.0	##
	Ex. 12		—	7.1	##
	Ex. 13		—	7.1	##
	Ex. 14		—	7.1	##
	Ex. 15		—	7.1	##
Extract of <i>Caput epidid.</i>	Ex. 1		—	6.8	##
	Ex. 2		—	7.0	##
	Ex. 3		—	7.0	##
	Ex. 4		—	7.0	##
	Ex. 5		—	7.0	##
	Ex. 6		—	7.0	##
	Ex. 7		—	7.1	##
Extract of <i>Corpus epidid.</i>	Ex. 1		—	7.0	##
Extract of testis	Ex. 1	2	**	7.1	##
	Ex. 2	0	***	7.0	##
	Ex. 3	0	***	7.0	##
	Ex. 4	0	***	7.1	##
	Ex. 5	$\frac{1}{2}$	**	7.0	##
	Ex. 6	0	***	7.0	##
	Ex. 7	0	***	7.0	##

3. Agglutination of the Rabbit Spermatozoa in the Blood Serum and other Body Fluids of the Rabbit

i) Action of the Blood Serum

The rabbit blood serum possesses great power of agglutinating the spermatozoa, and both agglutination and mass-coagulation occur in the undiluted blood serum; the agglutinating power is still retained even if the serum is diluted 64 times with glucose-phosphate-buffer solution (Table 19 and Pl. III, Fig. 9).

TABLE 19.

Influence of the rabbit blood serum upon the agglutination of spermatozoa.

Dilution degree of bl. serum	Agglutination of sp.				pH values of the fluids used		Motility of sp. immediately after mixing
	Time till aggl. sets in		Highest intensity				
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1, 2
	h	h					
0 times	0	0	***	***	8.0	8.0	+
2 "	0	0	***	***	7.9	8.0	+
4 "	0	0	***	***	7.6	7.8	++
8 "	0	0	***	***	7.4	7.6	++
16 "	$\frac{1}{2}$	0	***	***	7.4	7.4	+++
32 "	1	$\frac{1}{2}$	***	***	7.4	7.3	+++
64 "	1	1	**	*	7.4	7.2	+++

ii) Action of the Peritoneal Fluid

The spermatozoa agglutinate suddenly when they are mixed with the peritoneal fluid and show a very high intensity of agglutination (Table 20).

TABLE 20.

Influence of the peritoneal fluid upon the agglutination of spermatozoa.

No. of experiment	Agglutination of sp.		pH values of the fluids used	Motility of sp. immediately after mixing
	Time till aggl. sets in	Highest intensity		
Ex. 1	h 0	***	7.4	‡‡
Ex. 2	0	***	7.2	‡‡

iii) Action of the Aqueous Humor

The spermatozoa move very actively and agglutinate suddenly, forming large agglutinated masses, when they are mixed with the Aqueous Humor, whether undiluted or diluted with glucose-phosphate-buffer solution even up to 8 times (Table 21).

TABLE 21.

Influence of the aqueous humor upon the agglutination of spermatozoa.

Dilution degree of aq. humor	Agglutination of sp.						pH values of the fluids used			Motility of sp. immediately after mixing
	Time till aggl. sets in			Highest intensity						
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	
0 times	h 0	h 0	h 0	***	***	***	8.4	8.4	7.6	‡‡
2 ”	0	0	0	***	***	***	8.3	8.3	7.6	‡‡
4 ”	0	0	0	***	***	***	8.0	8.0	7.4	‡‡
8 ”	0	0	0	***	***	***	7.8	7.7	7.4	‡‡

iv) Action of Rabbit Milk

Milk taken from the milk glands of the rabbit soon after parturition has strong sperm agglutinating power even diluted 16 times with glucose-phosphate-buffer solution (Table 22).

TABLE 22.

Influence of rabbit milk upon the agglutination of spermatozoa.

Dilution degree of rabbit milk	Agglutination of sp.				pH values of the fluids used		Motility of sp. immediately after mixing
	Time till aggl. sets in		Highest intensity				
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	
	h	h					
0 times	0	0	***	***	7.6	7.5	+
2 "	0	0	***	***	7.6	7.5	+
4 "	0	0	***	***	7.6	7.5	+
8 "	0	0	***	***	7.6	7.5	+
16 "	0	$\frac{1}{2}$	***	***	7.6	7.5	+

Summarising the experimental results recorded above, we may state that a substance that causes agglutination of the rabbit spermatozoa exists in the glandular secretions, except that of the *Glandula prostata*, and in organ extracts, except that of the *Cauda epididymidis*, of the rabbit; in other words, that substance is not restricted to any particular organ of the rabbit, whether male or female.

4. Agglutination of the Rabbit Spermatozoa in the Body Fluids of Different Species

i) Action of Horse Blood Serum

Horse blood serum has also a strong sperm agglutinating power. In the pure blood serum, the first to occur is agglutination, which changes into mass-coagulation later on. The sperm agglutinating power is retained even if diluted 64 times with glucose-phosphate-buffer solution (Table 23).

TABLE 23.

Influence of horse blood serum upon the agglutination of spermatozoa.

Dilution degree of blood serum	Agglutination of sp.						pH values of the fluids used			Motility of sp. immediately after mixing
	Time till aggl. sets in			Highest intensity						
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	
0 times	h 0	h 0	h 0	* ..	* ..	* ..	7.2	7.8	7.6	+
2 "	0	0	0	* .	* ..	* ..	7.3	7.8	7.6	+
4 "	0	0	0	* .	* .	* .	7.3	7.6	7.5	+
8 "	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	* .	* .	* .	7.2	7.4	7.4	+
16 "	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	* .	* .	* .	7.2	7.2	7.2	+
32 "	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	* .	* .	* .	7.2	7.2	7.1	+
64 "	1	1	$\frac{1}{2}$	* .	* .	* .	7.2	7.2	7.0	+

ii) Action of the Vaginal Washings of Mare and Cow

To test this action, some of the mucus was removed from the *Orificium uteri externum* of mares or of cows; after dissolving this in glucose-phosphate-buffer solution, 2 drops of artificial-glucose-rabbit-sperm were added to 2 cc each of these mixtures.

The spermatozoa agglutinated, exactly with the same rapidity, and in the same degree, as they do if suspended in vaginal washings from the rabbit (Table 24).

TABLE 24.

Influence of secretion of the vagina of mare or cow upon the agglutination of spermatozoa.

	No. of experiment	Agglutination of sp.		pH values of the fluids used	Motility of sp. immediately after mixing
		Time till aggl. sets in	Highest intensity		
Cow	Ex 1	h $\frac{1}{2}$	6.6	+
	Ex. 2	"	*** .	6.6	+
	Ex. 3	"	.. .	6.5	+
Mare	Ex. 1	2	*** .	7.1	+
	Ex. 2	0	*** .	7.1	+
	Ex. 3	0	*** .	7.1	+

iii) Action of Cow's Milk

The rabbit spermatozoa show relatively weak movements but quite strong agglutination in cow's milk from which the fat globules have been removed by centrifuging.

Even after diluting the milk 32 times with glucose-phosphate-buffer solution, the spermatozoa agglutinate most intensively.

It is to be noted that both agglutination and mass-coagulation occur in the pure cow's milk (from which the fat globules are removed) and in the 2 times diluted milk, while only agglutination, but no mass-coagulation occurs when the milk is diluted more than 4 times with glucose-phosphate-buffer solution (Table 25).

TABLE 25.
Influence of cow's milk upon the agglutination of spermatozoa.

Dilution degree of cow's milk	Agglutination of sp.						pH values of the fluids used			Motility of sp. immediately after mixing
	Time till aggl. sets in			Highest intensity						
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	
0 times	h	h	h	***	***	***	7.0	7.9	6.8	+
2 "	$\frac{1}{2}$	0	0	***	***	***	7.0	7.8	6.9	+
4 "	$\frac{1}{2}$	0	0	***	***	***	7.0	7.6	7.0	+
8 "	$\frac{1}{2}$	0	0	***	***	***	7.0	7.4	7.0	+
16 "	$\frac{1}{2}$	0	0	***	***	***	7.1	7.3	7.1	+
32 "	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	***	***	***	7.1	7.2	7.1	+

From these experimental results it follows that the rabbit spermatozoa are agglutinated by the body fluids and secretions of other species as well as of the rabbit itself; in other words, the substance provoking agglutination of the rabbit spermatozoa is neither restricted to the rabbit itself, nor to any other particular species of mammals.

5. The Nature of Agglutination of the Rabbit Spermatozoa in the Female Genital Tract.

The figure of the sperm agglutination in the female genital tract

is not at all different from that of acid-agglutination as has been pointed out previously. Further, according to YAMANE (1921), sperm agglutination is easily induced not only by certain hydrogen ion concentrations but also by salts, especially by cations, and also in this case its figure agrees with that of acid-agglutination. According to the same author divalent ions possess stronger agglutinating power than monovalent ions.

F. R. LILLIE (1913) has observed sperm agglutination of the sea-urchin sperm induced by sea-water in which unfertilized eggs had been shaken, and he attributed this phenomenon to the action of an agglutinin derived from the unfertilized eggs which he named "fertilizin."

There arises now the question whether the sperm agglutination in the female genital tract of the rabbit is caused by the hydrogen ion concentration or by certain substances, i. e., salts or an agglutinin produced from the female side.

Now, as said before, the pH values of the vaginal washings and of the sperm ejaculated by normal copulation are found to lie between 7.20 and 7.38 when measured electrometrically (Table 26).

TABLE 26.

Hydrogen ion concentration of the rabbit vaginal washings and of the sperm ejaculated into the vagina.

	No. of experiment	pH values of the fluids used	Agglutination of sp.		Motility of sp. immediately after mixing
			Time till aggl. sets in	Highest intensity	
Vaginal washings	Ex. 1	7.38	10 min.	***	##
	Ex. 2	7.20	" "	***	##
Sperm	Ex. 1	7.33	" "	***	##
	Ex. 2	7.23	" "	***	##

As has been described in the last chapter, the pH ranges at which agglutination and mass-coagulation occur lie between 2.20 and

6.00, and above 8.23. On the other hand the pH values of the vaginal washings and of the ejaculated sperm and also those of blood serum, peritoneal fluid, aqueous humor and other body fluids and secretions that possess the power of sperm agglutination do not fall within either of these two pH ranges as has been shown in Tables 18-26.

From this it is clear that the sperm agglutination in the female genital tract does not result from the hydrogen ion concentration.

Though the rabbit spermatozoa do not agglutinate in the glucose-phosphate-buffer solution, they clearly agglutinate in many physiologically balanced solutions such as RINGER's, LOCKE's or TYRODE's solution.

This is probably due to the fact that the only cation contained in the glucose-phosphate-buffer solution is the Na-ion, whereas the physiologically balanced solutions contain divalent cations such as the Ca-ion and the Mg-ion.

The sperm agglutination in the female genital tract may be presumed to depend on the same factors as in the physiologically balanced solutions. The results of the following experiments will support this idea strongly.

i) Loss of the Sperm Agglutinating Power by Relatively Low Dilution

To the rabbit blood serum and the vaginal washings, both diluted in various degrees with glucose-phosphate-buffer solution, the artificial-glucose-sperm of the rabbit was added to examine their sperm agglutinating power. The sperm agglutinating power is lost by the blood serum when it is diluted to 128 or 256 times, and by the vaginal washings diluted to 64 times (Table 27). That is to say, the sperm agglutinating substance in the blood serum and in the vaginal washings loses its power by relatively low dilution in comparison with the immune agglutinin.

TABLE 27.

Influence of diluted vaginal washings and diluted blood serum of the rabbit upon the agglutination of rabbit spermatozoa.

Dilution degree of vaginal washings & of blood serum	Highest intensity of agglutination				Motility of sp. immediately after mixing	
	Vaginal washings		Blood serum		Vaginal washings	Blood serum
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1, 2	Ex. 1, 2
0 times	***	***	***	***	##	##
2 "	***	***	***	***	##	##
4 "	***	***	***	***	##	##
8 "	***	***	***	***	##	##
16 "	***	***	***	***	##	##
32 "	***	***	***	***	##	##
64 "	---	---	---	---	##	##
128 "	---	---	---	---	##	##
256 "	---	---	---	---	##	##

ii) The Substance that Causes Sperm Agglutination is Not of Organic Nature

a. It Does Not Lose its Sperm Agglutinating Power Even When Heated to 100°C

Even when the vaginal washings or horse blood serum have been heated to 100°C for 30-40 minutes, their sperm agglutinating power is neither lost nor diminished, as shown in Tables 28 and 29.

TABLE 28.

Influence of the heated vaginal washings of the rabbit upon the agglutination of rabbit spermatozoa.

No. of experi- ment	Agglutination of sp.				pH values of the fluids used		Motility of sp. immediately after mixing
	Time till aggl. sets in		Highest intensity				
	Heated vaginal washings	Normal	Heated	Normal	Heated	Normal	Heated v. w. or Normal v. w.
Ex. 1	10 min.	30 min.	***	***	7.4	7.4	##
Ex. 2	"	"	***	***	7.3	7.4	##
Ex. 3	"	"	***	***	7.3	7.3	##
Ex 4	"	"	***	***	7.2	7.1	##

TABLE 29.

Influence of the heated blood serum of the horse upon the agglutination of rabbit spermatozoa.

Dilution degree of blood serum	Agglutination of sp.						pH values of the fluids used			Motility of sp. immediately after mixing
	Time till aggl. sets in			Highest intensity						
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	
2 times	h 0	h 0	h 0	***	***	***	7.8	7.8	7.9	+
4 "	0	0	0	***	***	***	7.5	7.5	7.6	++
8 "	0	0	0	***	***	***	7.3	7.5	7.4	+++
16 "	1	1	1	***	***	***	7.1	7.1	7.1	+++
32 "	2	2.5	2	**	**	**	7.1	7.1	7.1	+++
64 "	6	6.5	6	*	*	*	7.1	7.1	7.1	+++

b. Neither the Rabbit Vaginal Washings Nor the Horse Blood Serum Lose Their Sperm Agglutinating Power Even if Putrefied

If we leave the rabbit vaginal washings for 17-27 days or the horse blood serum for 28 days at room temperature, so that they become thoroughly putrefied, and then dilute them 9 times with glucose-

TABLE 30.

Influence of the putrefied vaginal washings of the rabbit and of putrefied horse blood serum upon the agglutination of rabbit spermatozoa.

Vaginal washings or blood serum		Agglutination of sp.				pH values of the fluids used		Motility of sp. immediately after mixing
		Time till aggl. sets in		Highest intensity				
		Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ev. 2	
Vaginal washings	Putrefied	h 2	h 3	***	***	6.4	6.3	##
	Normal	2	3	***	***	7.2	7.2	##
Blood serum	Putrefied	0	0	***	***	7.2	7.2	##
	Normal	0	0	***	***	7.3	7.2	##

phosphate-buffer solution, they still show strong sperm agglutinating power.

Hence, neither the rabbit vaginal washings, nor the horse blood serum are deprived of their sperm agglutinating power even after complete putrefaction (Table 30).

c. It is Not Destroyed by Treating with Alcohol or Ether

When double the quantity of absolute alcohol or of ether was added to 5 cc of the vaginal washings obtained by injecting distilled water into the vagina, and the mixture, after a thorough shaking was kept for 24 hours at room temperature, the alcohol mixture showed some precipitation, while the ether mixture separated into 3 layers, i. e. of ether, a thin white ring, and vaginal washings.

After evaporation of the alcohol or ether in each mixture, enough

TABLE 31.

Influence of the rabbit vaginal washings treated with alcohol upon the agglutination of rabbit spermatozoa.

Vaginal washings	No. of experiment	Agglutination of sp.		pH values of the fluids used	Motility of sp. immediately after mixing
		Time till aggl. sets in	Highest intensity		
Vaginal washings treated with alcohol	Ex. 1	0 ^h	***	7.0	++
	Ex. 2	0	**	7.0	++
	Ex. 3	1	*	7.0	++
	Ex. 4	0	***	7.0	++
	Ex. 5	0	***	7.0	++
	Ex. 6	0	***	8.4	++
Vaginal washings (control)	Ex. 1	0	***	7.0	++
	Ex. 2	0	**	7.0	++
	Ex. 3	0	*	7.0	++
	Ex. 4	0	***	7.1	++
	Ex. 5	0	***	7.1	++
	Ex. 6	0	***	8.4	++

glucose-phosphate-buffer solution was added to make the volume of each specimen 5 cc, and then the sperm agglutinating power was examined.

These experiments proved that the substance that agglutinates the rabbit spermatozoa is not destroyed or deteriorated by alcohol or ether treatment (Tables 31 and 32).

TABLE 32.

Influence of the rabbit vaginal washings treated with ether upon the agglutination of rabbit spermatozoa.

Vaginal washings treated with ether	No. of experiment	Agglutination of spermatozoa		pH values of the fluids used	Motility of sp. immediately after mixing
		Time till aggl. sets in h	Highest intensity		
Dried residue from upper layer of fluid	Ex. 1		—	7.1	+
	Ex. 2		—	7.1	+
	Ex. 3		—	7.0	+
	Ex. 4		—	7.0	+
	Ex. 5		—	7.0	+
Dried residue from middle layer of fluid	Ex. 1	1	*	7.1	+
	Ex. 2	1	*	7.1	+
	Ex. 3	0	**	7.0	+
	Ex. 4	2	**	7.0	+
	Ex. 5	1	**	7.0	+
Dried residue from lower layer of fluid	Ex. 1	0	**	7.1	+
	Ex. 2	0	**	7.1	+
	Ex. 3	2	**	7.0	+
	Ex. 4	1	***	7.0	+
	Ex. 5	2	**	7.0	+
Normal vaginal washings (control)	Ex. 1	0	**	7.1	+
	Ex. 2	0	**	7.1	+
	Ex. 3	0	***	7.0	+
	Ex. 4	0	***	7.0	+
	Ex. 5	0	**	7.0	+

d. It Never Loses its Sperm Agglutinating Power
Even if Evaporated to Dryness

After evaporation of the rabbit vaginal washings, obtained by injecting distilled water into the vagina of a rabbit, to dryness at room temperature, glucose-phosphate-buffer solution was added and the sperm agglutinating power examined.

From this we learnt that the spermatozoa agglutinate very intensively in this solution, and that the rabbit vaginal washings are not deprived of sperm agglutinating power even if evaporated to dryness (Table 33).

TABLE 33.

Influence of the dried residue of the rabbit vaginal washings upon the agglutination of rabbit spermatozoa.

Vaginal washings	No. of experiment	Agglutination of sp.		pH values of the fluids used	Motility of sp. immediately after mixing
		Time till aggl. sets in	Highest intensity		
Dried residue of the vag. washings	Ex. 1	1	***	7.2	##
	Ex. 2	1	++	7.1	##
	Ex. 3	0	***	7.1	##
	Ex. 4	0	***	7.1	##
	Ex. 5	0	***	7.1	##
Vaginal washings (control)	Ex. 1	1	**	7.1	##
	Ex. 2	1	**	7.1	##
	Ex. 3	0	**	7.1	##
	Ex. 4	0	***	7.1	##
	Ex. 5	0	***	7.4	##

e. It is not Adsorbed by Kaolin or Blood Coal

After adding kaolin or blood coal to the vaginal washings and to the horse blood serum, I examined whether the sperm agglutinating substance is adsorbed by them or not.

TABLE 34.

Influence of the rabbit vaginal washings and the horse blood serum treated with blood coal, upon the agglutination of rabbit spermatozoa.

Vaginal washings or bl. serum		No. of experiment	Vol. of Vaginal washings or blood serum	Wt. of blood coal used	Time re-quired for ad-sorption	Aggl. of sp. Time till aggl. sets in	Highest in-tensity	pH values of the fluids used	Motility of sp. immediately after mixing
Vaginal washings	Treated with blood coal	Ex. 1	5 ^{cc}	0.1 ^g	2 ^h	2 ^h	***	6.8	##
		Ex. 2	5	0.3	5	2	***	6.7	##
		Ex. 3	5	0.5	24	1	***	6.6	##
	Normal (control)	Ex. 1	5	0	0	0	***	7.2	##
		Ex. 2	5	0	0	0	***	7.4	##
		Ex. 3	5	0	0	0	***	7.2	##
Blood serum	Treated with bl. coal	Ex. 1	5	0.5	1.5	0	***	7.1	##
		Ex. 2	5	0.5	1.5	0	***	7.1	##
	Normal (control)	Ex. 1	5	0	0	0	***	7.3	##
		Ex. 2	5	0	0	0	***	7.3	##

TABLE 35.

Influence of the rabbit vaginal washings and the horse blood serum treated with kaolin, upon the agglutination of rabbit spermatozoa.

Vaginal washings or bl. serum		No. of experiment	Vol. of vaginal washings or bl. serum	Wt. of kaolin used	Time re-quired for ad-sorption	Aggl. of sp. Time till aggl. sets in	Highest in-tensity	pH values of the fluids used	Motitity of sp. im-mediately after mixing
Vaginal washings	Treated with kaolin	Ex. 1	5 ^{cc}	1 ^g	1.5 ^h	1 ^h	**	7.3	##
		Ex. 2	5	1	1.5	2	**	7.1	##
		Ex. 3	5	1	1.5	1	**	7.1	##
	Normal (control)	Ex. 1	5	0	0	1	**	7.2	##
		Ex. 2	5	0	0	1	***	7.2	##
		Ex. 3	5	0	0	0	**	7.1	##

Blood serum	Treated with kaolin	Ex. 1	5	1	1.5	0	***	7.3	##
		Ex. 2	5	1	1.5	0	***	7.2	##
	Normal (control)	Ex. 1	5	0	0	0	***	7.3	##
		Ex. 2	5	0	0	0	***	7.3	##

These experiments showed clearly that the sperm agglutinating substance is adsorbed by neither kaolin nor blood coal, since the rabbit spermatozoa agglutinate with the same intensity as in normal blood serum or normal vaginal washings (Tables 34 and 35).

iii)

In addition to the facts contained in i) and ii) it must be repeated that the substance causing agglutination of the spermatozoa is not restricted to any one organ, and its activity does not depend on identity of the species, as has already been shown on pages 36-48.

iv)

The rabbit spermatozoa agglutinate intensively in such physiologically balanced solutions as RINGER's, TYRODE's, LOCKE's and 0.9% NaCl solutions.

Fully considering these facts we may conclude that also the sperm agglutination in the female genital tract is caused by the same salts as are present in the blood serum and various other body fluids. We may further state that agglutination of the rabbit spermatozoa is induced by the presence of electrolytes in low concentration.

6. Agglutination of the Horse Spermatozoa in the Blood Serum and in the Uterus of the Mare

The horse spermatozoa usually do not agglutinate in the horse sperm. In the horse blood serum, however, they show the same agglutinability as the rabbit spermatozoa and agglutinate intensively. But, unlike the rabbit spermatozoa, they always show more or less mass-coagulation (Table 36).

TABLE 36.

Influence of the horse blood serum upon the agglutination
of horse spermatozoa.

Dilution degree of bl. serum	Highest intensity of agglutination				PH Values of the fluids used				Motility of sp. immediately after mixing
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 4	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 4	Ex. 1-4
0 times	*** ...	***	7.2	7.6	7.2	7.2	+
2 "	*** ...	** ...	*	...	7.2	7.8	7.2	7.2	+
4 "	** ..	** ..	**	...	7.2	7.6	7.1	7.2	+
8 "	** ..	** ..	*	...	7.3	7.4	7.1	7.2	+
16 "	**	**	**	*	7.3	7.4	7.2	7.2	+
32 "	—	**	**	*	7.2	7.3	7.2	7.2	+

This is perhaps due to the fact that the motility of the spermatozoa is reduced in the blood serum notwithstanding the high degree of sperm agglutinating power possessed by the blood serum, since motility of the spermatozoa is the essential factor for agglutination, as shown on pages 23-24.

Moreover, I have observed agglutination in the ejaculated sperm recovered from the uterus 30 minutes after copulation in one case out of 4 (Table 37). This suggests that the horse spermatozoa tend to agglutinate in the female genital tract in the same way as the rabbit spermatozoa though not quite so strongly as the latter.¹⁾

TABLE 37.

Agglutination of the horse spermatozoa in the uterus of the mare.

No. of experiment	Interval between copulation and examination h	Sp. alive at recovery from vagina	Aggl. of sp.	Motility of sp. immediately after mixing
Ex. 1	$\frac{1}{2}$	80%	—	+
Ex. 2	"	"	—	+
Ex. 3	"	"	*	+
Ex. 4	"	"	—	+

1) Much to my regret I could not study the variations of agglutination at regular intervals as the mares at our disposal were intended for breeding purposes.

III. SIGNIFICANCE OF SPERM AGGLUTINATION IN REGARD TO FERTILIZATION IN MAMMALS

My experiments as described in the preceding chapters demonstrate that the rabbit and the horse spermatozoa agglutinate easily under the influence of certain hydrogen ion concentrations, of the secretions of the female genital tract and of other body fluids, and also that the cause of the agglutination is the action of salts contained in those substances.

While clearly the rabbit and the horse spermatozoa are endowed with a high degree of agglutinability, this phenomenon is by no means confined to the spermatozoa of these two species only, but may be seen also in other mammalian spermatozoa, though not in all of them in the same intensity.

Thus, DITTLER (1920), GUYER (1922), KURIHARA (1925), and FOGELSON (1926) observed agglutination in rabbit (DITTLER, GUYER), albino rat (FOGELSON), water buffalo and man (KURIHARA). Also KRZYSZKOWSKY and PAWLOW (1927) observed agglutination without rosette formation in man, dog, albino rat and bat, and typical agglutination in the guinea-pig.

According to my experiments with rabbit and horse spermatozoa, sperm agglutination can not only be artificially induced by application of acids, neutral salts, and physiologically balanced solutions (such as TYRODE's, RINGER's and LOCKE's solution), but also occurs naturally in the female genital tract as a vital reaction. This makes us think that sperm agglutination in the female genital tract may have some special bearing upon fertilization, and we are now confronted with the problem whether or not this is really the case.

However, before entering into this aspect of the mammalian sperm agglutination, it seems desirable to know something about the sperm agglutination as manifested by the lower animals. For sperm agglutination is not a phenomenon limited to mammals only, but is also to be observed in trout (GRAY 1920),¹⁾ frog (GELLHORN 1922, HERTWIG 1924),²⁾ KALWARYJSKI (1926), and marine animals (F. R. LILLIE 1912,

1), 2) Cited by KALWARYJSKI 1926.

1913, 1914, 1915, J. LOEB 1914, GLASER 1914, JUST 1915, 1919, SAMPSON 1922, WALTON 1924,¹⁾ COHN 1918); it has been studied especially in sea-urchins, starfishes and Nereis, and its important bearing upon fertilization was emphasized by F. R. LILLIE.

According to the latter author, the spermatozoa of Arbacia and Nereis react in three different ways against "egg-sea-water" i. e. the supernatant fluid after gently washing the unfertilized eggs. When a drop of such egg-sea-water is added to a sperm suspension, the spermatozoa are activated and their motility increased, and at the same time they form a ring by crowding round the margin of the drop. This phenomenon is called "aggregation."

In the next stage, this ring breaks up into small masses and these masses gather into "agglutination." In aggregation the spermatozoa simply crowd together, but never adhere to each other and never show any physical change. This phenomenon is irreversible. In agglutination, on the other hand, the spermatozoa collect into rosette-like masses, with their heads adhering to each other as they do in rabbit and horse spermatozoa. This phenomenon is reversible.

Moreover, when the spermatozoa of these animals are treated with blood, or egg-sea-water, of other species, or some chemicals such as caustic alkali, they coagulate into a network. This phenomenon is called "mass-coagulation," and is a lethal and irreversible process in just the same way as in the mammalian spermatozoa.

According to F. R. LILLIE, aggregation is a simple chemotactic reaction against CO_2 , acids, and egg secretion, but the agglutination is a specific vital reaction against some secretion of the egg and bears great significance upon the mechanism of fertilization. That is to say, the sperm agglutinin, i. e. "fertilizin," is secreted from the cortex of the egg and plays an important part in the union of the spermatozoa with the eggs by attaching itself with its spermophile group to the sperm receptor of the spermatozoon, and with its oophile group to the egg receptor of the egg. He points out that the sperm agglutination in the egg-sea-water is full proof of the existence of fertilizin in the unfertilized egg.

1) Cited by Kalwaryjski 1926.

According to my experiments with rabbit and horse spermatozoa, both agglutination and mass-coagulation are nothing but the flocculation of the colloids of which the spermatozoa consist, and agglutination is nothing but mass-coagulation of a lower intensity. Namely, in agglutination, the spermatozoa have not yet lost their vitality, and as the intensity of flocculation is low, their motility is still preserved so that only the heads, being influenced relatively strongly, adhere to each other, while the movement of the tails brings about a rosette-like arrangement. This phenomenon can be induced experimentally not only by application of acids or neutral salts, but also of physiologically balanced solution (such as RINGER'S, TYRODE'S, LOCKE'S solution) as shown already.

The sperm agglutination that occurs in the female genital tract after [normal copulation or artificial insemination must also be considered as after all the same colloidal flocculation, and its causative factor has been proved by the analysis of many experiments to be the action of the neutral salts common to the secretions of the female genital tract, the blood serum and to other body fluids.

In these cases there is not the slightest connection with any secretion from the egg, and consequently the fertilizin theory of F. R. LILLIE can not be applied to mammals such as the horse and the rabbit.

In a recent work YAMANE (1932) reports that he observed under the microscope living mature eggs of the rabbit from which the follicle cells had been removed and approached to them a few spermatozoa by the aid of a glass needle. In this case no such thing as a special attraction of the spermatozoa toward the egg could be ascertained even when the distance between them was very short. There is consequently no reason for supposing that the movement of the spermatozoa is controlled or directed by any special chemical substance diffusing out of the egg. By and by, however, the spermatozoa start crowding toward the surface of the *Zona pellucida*, simulating some chemotactical influence. YAMANE explains this phenomenon as identical with the "trap action" of WILSON.

If this opinion is accepted, also the sperm agglutination in the female genital tract may be justly regarded as "trap action" of the spermatozoa *inter se*, and in the same way agglutination resp. "trap action" between the spermatozoa and the ovum may take place, when they come in contact with each other. Such "trap action" is not a special phenomenon restricted to the contact between ovum and spermatozoon, or between spermatozoa of the same species *inter se*, but occurs also between spermatozoa of different species, for example, between horse spermatozoa and rabbit spermatozoa (YAMANE 1921), or between spermatozoa and various tissue cells (YAMANE 1932); thus, when rabbit spermatozoa are brought together with rabbit red blood corpuscles in McILLVAINE's buffer solution, the spermatozoa show agglutination and mass-coagulation clustering round the red blood corpuscles as a center (Table 38 and Pl. III, Fig. 10).

TABLE 38.

Aggutation between rabbit spermatozoa and red blood corpuscles.

pH	Aggl. or mass-coagul.	Motility of sp. immediately after mixing	pH	Aggl. or mass-coagul.	Motility of sp. immediately after mixing
2.2	...	—	4.8	***	‡
2.4	...	—	5.0	***	‡
2.6	...	—	5.2	**	‡
2.8	...	—	5.4	**	‡
3.0	...	—	5.6	*	‡
3.2	...	+	5.8	*	‡
3.4	...	+	6.0	*	‡
3.6	...	‡	6.2	—	‡
3.8	****	‡	6.4	—	‡
4.0	***	‡	6.6	—	‡
4.2	***	‡	6.8	—	‡
4.4	***	‡	7.0	—	‡
4.6	***	‡			

Seen from this angle, sperm agglutination may be said to be of great importance for fertilization also in mammals, though there it occurs regardless of the egg-substance. The spermatozoa in the female genital tract stand always under the influence of the salts contained in the secretions, and thus are always prepared for union with an egg whenever encountered.

If the agglutination of the spermatozoa really plays an important role in fertilization, the fact that sperm agglutination, accompanied by phagocytosis, take place in the vagina already 10-15 minutes after copulation, might on first sight appear as scarcely conducive to fertilization, because apt to impede the movement of the spermatozoa or even prevent their arrival in the uterus and the oviducts altogether.

If, however, we take into account the rapidity with which the spermatozoa disperse within the female genital tract, we realize that no such unfavourable consequences must be expected. The time necessary for arrival of the spermatozoa in the oviducts is, in general, much shorter than might *a priori* be considered likely. Thus, according to BISCHOFF and LEUCKART,¹⁾ HENSEN (1876),²⁾ HEAPE (1905),³⁾ PARKER (1931), and KATO (1932), the spermatozoa may be found in the middle part of the oviducts already 15 minutes after copulation (BISCHOFF and LEUCKART), in the anterior half within 1 hour (KATO), in the infundibulum 4 hours (HEAPE) or 3 hours (PARKER), and at the ovary 2½ hours (HENSEN) after copulation, as already described.

From this it becomes clear that the more active spermatozoa can arrive in the oviducts quite shortly after copulation. Besides, owing to the scant number in which the spermatozoa are present in the oviducts, they have only rare opportunities of agglutinating with each other even though the secretion of oviducts acts very powerfully as a sperm agglutinating agent. The spermatozoa, therefore, will adhere to, and fertilize the ova, whenever they come in contact with them without agglutinating with each other, whether they ascend the oviducts by rheotaxis against the ciliary current as believed hitherto, or

1) Cited by HOEHNE and BEHNE 1914.

2), 3) Cited by PARKER 1931.

are transported there by the peristaltic movements of the oviducts as stated by PARKER (1931).

In my experiments the rabbits showed normal parturition, though the sperm recovered from the vagina after mating was found to be intensively agglutinated, a fact that places it beyond doubt that fertilization is nowise impeded by agglutination (Table 39).

TABLE 39.
Influence of sperm agglutination upon the fertilization of the rabbit.

No. of female rabbit	Aggl. of sp. in the vagina		Result	
	Interval between copulation and examination	Intensity of aggl.	Gestation period	Litter size
	h		days	
No. 1	2	***	33	9
No. 1	3	***	32	10
No. 9	0	***	0	0
No. 10	0	***	33	6
No. 13	0	***	0	0
No. 15	5	***	33	9
No. 17	0	***	33	5
No. 23	8	**	33	1

Though both the mammalian spermatozoa and the sea-urchin spermatozoa unite with the eggs by agglutination, yet the factors that agglutinate the spermatozoa are fundamentally different. This is due to the different agglutinability of the proteins entering into the constitution of the mammalian resp. the sea-urchin spermatozoa. The latter do not so easily agglutinate as the mammalian spermatozoa. Thus rabbit as well as horse spermatozoa agglutinate suddenly when they are transferred into sea-water, but sea-urchin spermatozoa do not agglutinate in pure sea-water, though they agglutinate readily in egg-sea-water.¹⁾

In this connection it should be noted that also rabbit spermatozoa

1) This observation was made at the Marine Laboratory at Oshoro, Hokkaido, on September 24, 1929.

agglutinate suddenly in the egg-sea water of sea-urchins. For instance, when 2 drops of such egg-sea-water are added to 1 cc of rabbit sperm suspension, the spermatozoa agglutinate suddenly; on the other hand, when 2 drops of pure sea-water are added instead of the egg-sea-water, agglutination does not take place suddenly, on account of the low concentration of the sea-water, and of the absence of the special factor contained in the egg-sea-water; only after the lapse of 8 hours are there faint traces of agglutination (Table 40 and Pl. III, Fig. 11).

TABLE 40.

Influence of the egg-sea-water of sea-urchins upon the agglutination of rabbit spermatozoa.

Egg-sea-water or sea-water	Agglutination of spermatozoa				pH values of the fluids used		Motility of sp. immediately after mixing	
	Time till aggl. sets in		Highest intensity		Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2
	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 1	Ex. 2				
Egg-sea-water	h 0	h 0	***	***	7.0	7.0	##	##
Sea-water	8	8	**	*	7.0	7.0	+	+

Further it must be pointed out that agglutination of the horse spermatozoa does not usually occur in the pure ejaculated sperm obtained by means of the condom,¹⁾ and that its pH value lies between 7.26 and 7.67 (YAMANE and KATO 1928); for that latter reason agglutination, if it occurs in this sperm, can never be attributed to hydrogen ion concentration, but to the action of certain salts that, according to YAMANE (1921), are contained in the horse sperm serum, i. e. the mixture of the secretions of the male accessory sexual glands separated from the spermatozoa. These are salts of Na, K, Mg, Ca, Cl, and P₂O₅, and their quantity amounting to 0.904% or 0.925% on an average when measured as ash.

Pure ejaculated sperm is really a suspension of spermatozoa in

- 1) Unfortunately I am not in a position to report on the sperm agglutination in the pure ejaculated sperm of the rabbit, as I found it impossible to use the condom with the rabbit.

sperm serum. Therefore, if sperm agglutination is caused by the action of salts in glandular secretions or in organ extracts, it should also be caused by the salts in the sperm serum. As a rule, however, this is not the case; on the contrary, the spermatozoa ordinarily are, and remain, equally distributed in the sperm serum, and do not agglutinate.

From these facts we must conclude that some anti-agglutinin chemism exists in the sperm serum. In this respect, I have to refer to my experiments reported in a preceding chapter, which showed that, among the secretions, resp. extracts, of the male genital organs, those of the testis and the seminal vesicle possess the power of agglutinating the spermatozoa, while in those of the prostata and the epididymis this power is obviously absent. We may therefore safely assume that the anti-agglutinin substance is supplied by the latter two organs. Though its nature is yet unknown, this anti-agglutinin substance from the prostata and the epididymis may be considered to act as a protective colloid against the salts that otherwise would cause agglutination.

Well known are the difficulties attending the even distribution of the spermatozoa obtained from the *Cauda epididymidis* throughout the sperm-suspending medium. On the other hand, in the naturally ejaculated sperm the spermatozoa are distributed quite homogeneously throughout the sperm already at the very instant of ejaculation, that is to say, some anti-agglutinin influence is evident. Accordingly, if agglutination occurs in the normal ejaculated sperm, it may be regarded as due to an insufficiency of the anti-agglutinin action of the sperm serum, which may arise, for example, from a qualitative or quantitative defect in the secretions of epididymis, or prostata, or both, compared with the secretions from the other accessory sexual glands. In fact, agglutination of the horse spermatozoa can sometimes be seen in the normal ejaculated sperm obtained by the condom method. If, however, the sperm is ejaculated into the vagina, agglutination must always be considered to take place under the influence of the secretions of the female genital tract, which is powerful enough to counteract the anti-agglutinin effect of the male secretions.

It might be objected that, if there are such intimate relations between sperm agglutination and the union of the spermatozoa with the eggs, agglutination should occur in all mammals. In point of fact, some of them show typical agglutination while others do not, and some of them agglutinate very intensively, others only faintly. These facts seem to be inconsistent with the above consideration. But we must remember that it is the agglutinability of the spermatozoa, not the sperm agglutination itself, that is necessary for the union of the spermatozoa with the eggs. Sperm agglutination, after all, is nothing but an expression of the agglutinability of the spermatozoa, and all the mammalian spermatozoa must be considered to have such a degree of agglutinability that they become able to unite with the eggs under the influence of the female genital secretions; it is only natural, that there exists a difference in the degree of agglutinability, i. e. the intensity of the agglutination in different species. There can be little doubt that the main factors underlying these differences are the form and the size of the heads of the spermatozoa.

It is easily understood that the spermatozoa of horse, rabbit, and guinea-pig, with their flattened heads, offering a great many points of contact to each other, readily stick together, and are difficult to separate once adhesion has occurred, while other spermatozoa with cylindrical, or hook-shaped, or spear-shaped heads, offering only a few points or lines of contact to each other, are, on the contrary, difficult to adhere and easy to separate again.

Even among the spermatozoa with flattened heads there are differences; for example, the rabbit spermatozoa agglutinate more readily than the horse spermatozoa, probably because the greater surface of their heads offers more chances of adhesion and greater difficulties of separation.¹⁾

1) According to YAMANE (1936), the size of the head of horse and rabbit spermatozoa is as follows:

	Horse	Rabbit
Length, ($M \pm m_M$)	6.62 ± 0.0191	8.00 ± 0.0152
Width, ($M \pm m_M$)	3.43 ± 0.0111	5.01 ± 0.0116

IV. SUMMARIES

1. Summary of Part I

1) The horse spermatozoa agglutinate at the pH values between 6.4 and 5.0, and also at some pH values above 8.3.

The rabbit spermatozoa agglutinate at the pH values between 6.0 and 3.6, and also at some pH values above 8.23.

2) The spermatozoa show mass-coagulation at the pH values between 3.6 and 2.2 in the case of the horse, and between 3.8 and 2.2 in that of the rabbit.

3) In the case of the horse spermatozoa, there can be seen a clear cut gap between the pH ranges of agglutination and those of mass-coagulation, but in the case of the rabbit spermatozoa the pH ranges for agglutination and mass-coagulation are continuous, overlapping each other at the pH values of 3.6 and 3.8, where both phenomena occur at the same time.

4) Agglutination is a vital phenomenon and absolutely requires unimpaired motility of the spermatozoa; the spermatozoa agglutinate in rosette form, with their heads attached to each other in one central mass, and their tails radiating in all direction. This phenomenon is reversible. In mass-coagulation, the spermatozoa show no motility and form an irregular mass. This phenomenon is irreversible. Nevertheless, these two phenomena are in no ways different from each other, on the contrary, agglutination is nothing but mass-coagulation accompanied by motility, and mass-coagulation nothing but agglutination without motility.

Both these phenomena are in nowise different from the colloidal flocculation that occurs at the pH values near the iso-electric points of the substances of which the spermatozoa are composed.

5) There are three pH values (iso-electric points), viz. pH 5.6, pH 3.0-2.8 and a certain value above pH 8.3, at which the horse spermatozoa agglutinate suddenly.

For the rabbit spermatozoa two such pH values can be ascertained, viz. pH 3.0-3.2, and certain value above pH 8.23, and it stands to reason that there is the third one between pH 6.0 and pH 3.6, though its precise position is difficult to determine, because the agglutination gradually increases in intensity with the decreasing pH values, until it finally changes into mass-coagulation.

6) Both in the horse and the rabbit, the iso-electric points of the spermatozoa agree so nearly with those of the sperm sera that the difference between them may be neglected.

2. Summary of Part II

1) Almost immediately after normal copulation or artificial insemination the rabbit spermatozoa begin to agglutinate. The intensity of agglutination increases with the lapse of time, but decreases again after 8 hours, and scarcely any agglutinated spermatozoa can be found after 18-24 hours.

2) Agglutination in the vagina must be attributed to the action of the vaginal secretions, which also *in vitro* cause agglutination of artificial-glucose-sperm.

3) The secretion of the uterus too has the power of sperm agglutination, and intensive agglutination can be found in the uterus 5-10 hours after copulation. Also artificial-glucose-sperm is agglutinated *in vitro* by this secretion.

4) Though the secretion of the oviducts shows the sperm agglutinating power *in vitro*, no agglutinated spermatozoa can be seen in the oviducts after normal copulation.

5) Among the male genital organs, sperm agglutinating power is shown by the secretion of the seminal vesicle and also the extract of the testis, while it is obviously absent in the secretions of prostata and epididymis.

6) The sperm agglutinating substance of the horse and the rabbit is specific neither for the species nor for any particular organ.

7) Experimental evidence shows that sperm agglutination depends exclusively on the neutral salts contained in the secretions.

8) From the above facts we must conclude that the agglutination of the mammalian spermatozoa takes place not only within certain pH ranges, but may also be induced by very low concentrations of electrolytes other than the H-ion.

3. Summary of Part III

1) Starting from the reflection that a) the spermatozoa are agglutinable under certain conditions, not only among themselves, but also with other tissue cells; b) some sperm agglutinating substance, i. e. a mixture of certain salts, is always present in the female genital tract; we come to the conclusion that the phenomenon of sperm agglutination plays an important role in the union of the spermatozoa with the eggs.

2) It is, however, not the sperm agglutination itself, but the agglutinability of the heads of the spermatozoa that is necessary for the union of the spermatozoa with the eggs; the sperm agglutination is only an expression of the agglutinability of the spermatozoa.

3) The reason why in one animal sperm agglutination occurs readily, while in an other it is difficult may be found in the size and shape of the heads of the spermatozoa.

4) The fact that sperm agglutination does not occur in the natural normal semen, notwithstanding the considerable amount of salts contained in it, seems to be due to the anti-agglutinic action of the secretions of prostata and epididymis.

LITERATURE CITED

- BURIAN, R., 1904. Chemie der Spermatozoen. I. Ergebn. d. Physiol., 3 Jahrg., I. Abt.
 ———, 1906. Chemie der Spermatozoen. II. Ibid., 5 Jahrg., I & II Abt..
- COHN, E. J., 1918. Studies in the physiology of spermatozoa. II. Environmental conditions that effect the activity of spermatozoa. Biol. Bull., Vol. 34.
- CSONKA, F. A., & J. C. MURPHY, & D. B. JONES, 1926. The iso-electric points of various proteins. Jour. Amer. Chem. Soc., Vol. 48.
- DITTLER, R., 1920. Die Sterilisierung des weiblichen Tierkörpers durch parenterale Spermazuführ. Münchener Med. Wochenschr., Bd. 67.
- FEINSCHMIDT, J., 1912. Die Säureflockung von Lecithin und Lecithin-Eiweissgemischen. Biochem. Zeitschr., Bd. 38.
- FOGELSON, J., 1926. The non-specific antigenic effect of spermatozoa upon fertility. Surg. Gyn. & Obst., Vol. 42.
- GELLHORN, E., 1922. Beiträge zur vergleichenden Physiologie der Spermatozoen. II. Mitteilung. Weitere Studien über Salzwirkungen. Pflügers Arch., Bd. 193.
- GLASER, O. C., 1914. A quantitative analysis of the egg secretions and extracts of Arbacia and Asterias. Biol. Bull., Vol. 26.
- GUYER, M. F., 1922. Studies on cytolytins. III. Experiments with spermatotoxins. Jour. Exp. Zool., Vol. 35.
- HAMMARSTEN, O., 1926. Lehrbuch der physiologischen Chemie. Elfte Aufl., München.
- HOEHNE, O., & K. BEHNE, 1914. Über die Lebensdauer homologer und heterologer Spermatozoen im weiblichen Genitalapparat und in der Bauchhöhle. Zeitschr. f. Gyn., Jahrg. 38.
- JUST, E. E., 1915. An experimental analysis of fertilisation in *Platynereis megalops*. Biol. Bull., Vol. 28.
- , 1919. The fertilisation reaction in *Echinarachnius parma*. II. The role of fertilizin in strait- and cross-fertilisation. Ibid., Vol. 36.
- KALWARYJSKI, B. E., 1926. Über Samenfädenagglutination unter Einwirkung chemischer Agenzien. Biochem. Zeitschr., Bd. 169.
- KATO, K., 1932. On the agglutination of rabbit spermatozoa in the female genital tract (in Japanese). Jour. Soc. Trop. Agr., Vol. 4.
- KRZYSZKOWSKY, K. N., & G. N. PAWLOW, 1927. Beiträge zur Biologie der Spermatozoen. Zeitschr. f. Tierz. u. Züchtungsbiol., Bd. 10.
- KURIHARA, K., 1925. Experimental and clinical studies on the sperm immunity with special reference to a cause of sterility (in Japanese). Chiba Igakkai Zassi, Vol. 3.
- LILLIE, F. R., 1912. The production of sperm iso-agglutinins by ova. Science, N. S., Vol. 34.
- , 1913. The mechanism of fertilization. Ibid., Vol. 38.
- , 1913. Studies of fertilization. V. The behavior of the spermatozoa of Nereis and Arbacia with special reference of egg-extractives. Jour. Exp. Zool., Vol. 14.
- , 1914. Studies of fertilization. VI. The mechanism of fertilization in Arbacia. Ibid., Vol. 16.
- , 1915. Studies of fertilization. VII. Analysis of variations in the fertilizing power of sperm suspensions of Arbacia. Biol. Bull., Vol. 28.
- , 1915. Spermagglutination and fertilization. Ibid., Vol. 28.
- LOEB, J., 1914. Cluster formation of spermatozoa caused by specific substance from eggs. Jour. Exp. Zool., Vol. 17.

- MATHEWS, A., 1897. Zur Chemie der Spermatozoen. *Zeitschr. f. physiol. Chem.*, Bd. 27.
- MIYAKE, S., 1927. The iso-electric points of protamines. *Ibid.*, Bd. 172.
- MICHAELIS, L., & P. RONA. 1910. Beiträge zur allgemeinen Eiweisschemie. I. Die Koagulation des denaturierten Albumins als Funktion der Wasserstoffionenkonzentration und der Salze. *Biochem. Zeitschr.*, Bd. 27.
- , & H. DAVIDSON, 1911. Der isoelektrische Punkt des genuinen und des denaturierten Serumalbumins. *Ibid.*, Bd. 33.
- , & ———, 1912. Über das Flockungsoptimum von Kolloidgemischen. *Ibid.*, Bd. 39.
- , & T. NAKASIMA, 1923. Eine weitere Methode zur Bestimmung des isoelektrischen Punktes von Eiweisskörpern und ihre Anwendung auf die Serumalbumine verschiedener Tiere. *Ibid.*, Bd. 143.
- PARKER, G. H., 1913. The passage of sperms and of eggs through the oviducts in terrestrial vertebrates. *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Series B*, Vol. 219.
- PISCHINGER, A., 1927. Über die isoelektrischen Punkte der Muskelbestandteile. *Pflügers Arch.*, Vol. 27.
- RONA, P., & L. MICHAELIS, 1910. Beiträge zur allgemeinen Eiweisschemie. II. Über die Fällung der Globuline im isoelektrischen Punkt. *Biochem. Zeitschr.*, Bd. 28.
- SAMPSON, M. M., 1922. Isoagglutination and heteroagglutination of spermatozoa. *Biol. Bull.*, Vol. 43.
- SLOWTZOFF, B., 1902. Zur Chemie des menschlichen Spermas. *Zeitschr. f. physiol. Chem.*, Bd. 35.
- SÖRENSEN, S. P. L., 1918. Protein Studien. II. Mitteilung. Über das Säure- und Basebindungsvermögen des Eieralbumins. *Ibid.*, Bd. 103.
- STEUDEL, H., 1911. Zur Histochemie der Spermatozoen. I. Mitteilung. *Ibid.*, Bd. 72.
- , 1911. Zur Histochemie der Spermatozoen. II. Mitteilung. *Ibid.*, Bd. 73.
- YAMANE, J., 1921. Studien über die physikalische und chemische Beschaffenheit des Pferdespermas mit besonderer Berücksichtigung der Physiologie der Spermatozoen. *Jour. Coll. Agr., Hokkaido Imp. Univ., Sapporo*, Vol. 9.
- , & K. KATO, 1928. Über die Wasserstoffionenkonzentration des Spermas beim Pferde und ihr Wirkungsoptimum auf die Vitalität der Spermatozoen beim Pferde und Kaninchen. *Zeitschr. f. Tierz. u. Züchtungsbiol.*, Bd. 12.
- , 1932. On the mechanism of entrance of spermatozoon into the ovum in the rabbit (in Japanese). *Dōbutugaku Zasshi (Zoological Magazine)*, Vol. 44.
- , 1936. Körpergrösse und Spermengrösse. Eine vergleichende Untersuchung über die Grösse der Spermien beim Pottwal, Pferd und Kaninchen. *Zeitschr. f. Züchtg., Reihe B*, Bd. 34.
-

EXPLANATION OF FIGURES**Pl. I.**

Fig. 1. Agglutination of rabbit spermatozoa in McIlvaine's buffer solution (pH=5.0). $\times 235$.

Fig. 2. Agglutination and mass-coagulation of rabbit spermatozoa in McIlvaine's buffer solution (pH=3.8).

Agglutination and mass-coagulation appear in equal intensity. $\times 235$.

Fig. 3. Agglutination and mass-coagulation of rabbit spermatozoa in McIlvaine's buffer solution (pH=3.6).

Mass-coagulation predominates over agglutination. $\times 235$.

Fig. 4. Mass-coagulation of rabbit spermatozoa in McIlvaine's buffer solution (pH=3.2). $\times 235$.

Pl. II.

Fig. 5. Agglutination of rabbit spermatozoa in the vagina 15 minutes after normal copulation. $\times 235$.

Fig. 6. Phagocytosis of rabbit spermatozoa by leucocytes in the vagina 3 hours after normal copulation. $\times 235$.

Fig. 7. Phagocytosis of rabbit spermatozoon by leucocyte in the vagina 3 hours after normal copulation. $\times 1500$.

Pl. III.

Fig. 8. Agglutination of rabbit spermatozoa in the secretion of the rabbit uterus. $\times 235$.

Fig. 9. Agglutination of rabbit spermatozoa in rabbit blood serum (diluted 32 times with glucose-phosphate-buffer solution). $\times 235$.

Fig. 10. Agglutination between rabbit spermatozoa and rabbit red blood corpuscles in McIlvaine's buffer solution (pH=4.8).

Fig. 11. Agglutination of rabbit spermatozoa in the egg-sea-water of sea-urchins. $\times 235$.



Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.

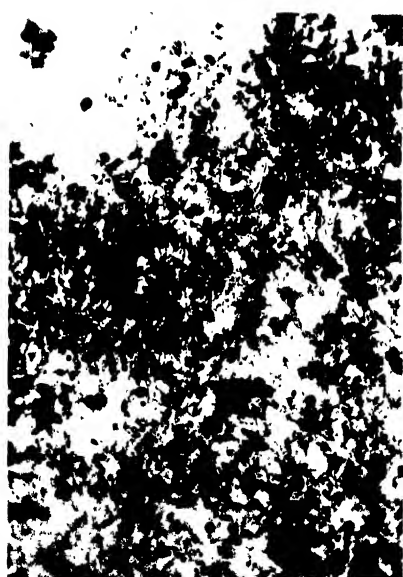


Fig. 4.

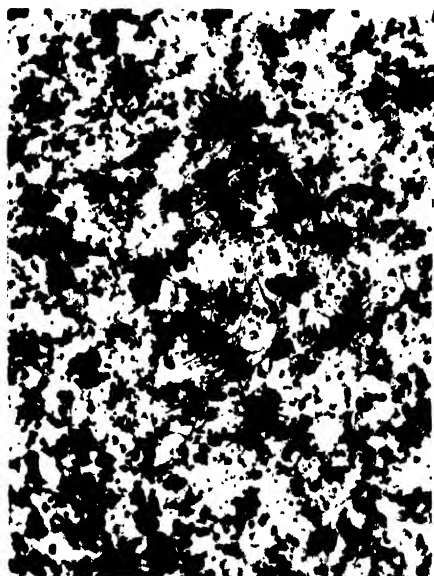


Fig. 5.



Fig. 6.



Fig. 7.



Fig. 8.



Fig. 9

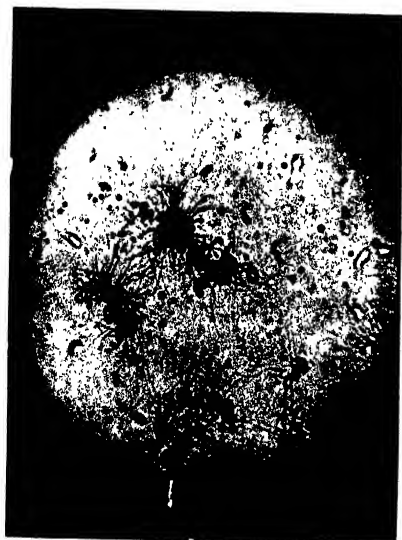


Fig. 10.



Fig. 11.

THE TICKS PARASITIC ON THE PRINCIPAL DOMESTIC ANIMALS IN FORMOSA, JAPAN

(With Plates IV—VIII)

by

Kisajiro OGURA

(Accepted for publication, June 11, 1936)

For 3 years we have engaged in the study of cattle piroplasmosis in Formosa, and of the ticks that may transmit it. In this paper we give some taxonomic contributions to our knowledge of those ticks.

About 2,000 ticks collected from cattle, water buffaloes, pigs, and dogs in various parts of Formosa were minutely examined, and 6 different species recognized, viz. *Boophilus annulatus* var. *caudatus* (NEUMANN), *Rhipicephalus sanguineus* LATR., *Amblyomma testudinarium* C. L. KOCH, *Haemaphysalis hystricis* SUPINO, *Haemaphysalis flava* NEUMANN, and *Haemaphysalis formosensis* NEUMANN.

1. *Boophilus annulatus* var. *caudatus* (NEUMANN).

Fig. 1-6.

Male. Scutum dark brown or brown, long-oval, narrow in front, with numerous scattered fairly long white hairs; cervical grooves shallow, visible for anterior third of scutum, slightly concave externally; lateral grooves absent; scapulae blunt; punctations very shallow and inconspicuous; caudal process well developed; festoons absent.

Eyes small, flat and inconspicuous.

Capitulum short. Basis capituli with blunt and short cornua, hexagonal in dorsal view, with slightly salient lateral corners. Palps a little longer than broad, segment 2 largest; segment 1 with a blunt

ventral spine, second and third segments each with a well-chitinized sharp ridge. Hypostome: dentition 4/4, with uniformly strong teeth.

Venter. Genital orifice between second coxae; anal and post-anal grooves very faintly indicated; close to the anus a pair of adanal shields, and also a pair of accessory adanal shields; each adanal shield subtriangular, its anterior end blunt, the posterior side of it indicates 2 blunt processes, inner one longer; each accessory adanal shield nearly semi-circular, round side external and its posterior angle with one short process; posterior third of these 2 pairs of shields free from body. Spiracles small, nearly circular, macula anterior.

Legs. Coxa 1 bifid and strongly produced anteriorly, visible in dorsal view; coxae 2 and 3 each with an indication of 2 (internal and external) tubercles, of which the external is a little more conspicuous; coxa 4 with an external tuberosity; tarsi moderate, tapering gradually to 2 short spurs.

Measurements (mm)

No.	Scutum		Capitulum	Basis capituli		Caudal process length
	length	width		length	width	
1	2.35	1.10	0.40	0.15	0.50	0.15
2	2.50	1.05	0.35	0.15	0.45	0.15
3	2.05	1.05	0.35	0.15	0.45	0.10
4	2.55	1.15	0.425	0.15	0.502	0.20
5	2.25	1.10	0.34	0.14	0.45	0.10

Female. Body long oval, with numerous white hairs; may attain 13 mm when replete; festoons absent.

Scutum dark brown, long-oval, narrowed behind, color of lateral fields darker; cervical grooves well marked, subparallel, reaching the postero-lateral borders; scapulae blunt; punctations ill-defined.

Eyes a little anterior to the middle of the scutal length, white, well marked and a little protruded.

Capitulum: Basis capituli, hexagonal in dorsal view, lateral cor-

ners strongly salient; cornua absent; porose areas short-oval, oblique, diverging in front, the interval nearly equal to their length. Palps short, second and third segments respectively with a sharp ridge. Hypostome; dentition 4/4, with uniformly strong teeth.

Venter. Genital orifice between coxae 2; anal grooves obsolete, post-anal groove scarcely present. Spiracles small, nearly circular; macula anterior.

Legs. Coxa 1 bifid, posterior border of coxae 2, 3, and 4 each with a well-chitinized sharp ridge, of which the external part is more conspicuous. Tarsi moderate, tapering gradually towards the end.

Measurements

No.	Scutum		Capitulum	Basis capituli	
	length	width	length	length	width
1	1.07	0.95	0.55	0.20	0.75
2	1.00	1.00	0.525	0.20	0.75
3	1.02	1.05	0.60	0.25	0.825
4	1.07	1.00	0.60	0.25	0.80
5	0.92	0.90	0.55	0.20	0.725

All the specimens taken from cattle or water buffaloes.

Hab. Formosa (Taihoku, Takao, Taito), Kyusyu (Aso), Ryukyu, Korea.

This species is the most common of cattle ticks in Formosa.

2. *Rhipicephalus sanguineus* LATR.

Fig. 7-12.

Male. Scutum well-chitinized, uniformly reddish brown, long-oval, narrow in front; cervical grooves short and deep; lateral grooves including first 2 festoons; punctations irregular in size, the larger ones in small number; festoons well-defined and long, the middle one frequently larger.

Eyes flat, ill-defined.

Capitulum small. Basis capituli hexagonal in dorsal view, external corners fairly salient; cornua fairly sharp. Palps short and broad, articles 2 and 3 subequal in size, without any spine. Hypostome of uniform thickness; dentition 3/3.

Venter. Genital orifice between coxae 2; anal grooves embracing the anus posteriorly; close to the anus a pair of adanal shields and also a pair of accessory adanal shields, the former subtriangular, with the inner side a little concave, the latter spiniform, very small. Spiracles very elongate comma-shaped.

Legs. Coxa 1 strongly bifid. coxae 2, 3 and 4 each with a short blunt external spur and a slight tubercle or a sharp ridge at the protero-internal corner. Tarsi moderate, tapering gradually to 2 short spurs.

Measurements

No.	Scutum		Capitulum	Basis capituli	
	length	width	length	length	width
1	2.75	1.60	0.55	0.25	0.65
2	3.25	1.90	0.65	0.30	0.70
3	2.40	1.40	0.50	0.20	0.60
4	3.45	2.10	0.80	0.30	0.75
5	2.65	1.65	0.50	0.20	0.65

Female. Body oval, narrow in front, marginal grooves include 2 festoons, festoons well-warked.

Scutum short oval, contour a little angular, uniformly reddish brown; punctations irregular in size, the finer ones in great number; cervical grooves well-marked, concave externally, not reaching the posterior border; lateral grooves a little shallow, parallel to the lateral borders of the scutum and almost reaching the posterior ends of the cervical grooves; scapulae blunt.

Eyes flat, well defined, situated in the middle of the scutal length.

Capitulum small. Basis capituli hexagonal in dorsal view, external corners very salient; porose areas small and almost circular, distance broader than their diameter; cornua short and blunt. Palps short and broad, articles 2 and 3 subequal. Hypostome, dentition 3/3.

Venter. Genital orifice between coxae 2. Spiracles elongate comma-shaped.

Legs. About the same as in the male.

Measurements

No.	Scutum		Capitulum	Basis capituli	
	length	width	length	length	width
1	1.35	1.20	0.55	0.20	0.70
2	1.35	1.25	0.55	0.20	0.70
3	1.35	1.25	0.60	0.20	0.75
4	1.70	1.60	0.80	0.30	0.90
5	1.45	1.35	0.55	0.55	0.70

The specimens were taken from dogs, cattle, and water buffaloes.

Hab. Formosa (Taihoku, Kagi, Takao).

3. *Amblyomma testudinarium* C. L. KOCH

Fig. 13-18.

Male. Scutum ornate, short oval, narrower in front, pseudoscutum well-marked; cervical grooves shallow, visible for a fifth of the scutal length, diverging posteriorly; lateral grooves absent; festoons long and well-marked; punctations deep and well-marked, irregular in size; no scapulae.

Eyes flat, inconspicuous.

Capitulum long and ornate. Basis capituli pentagonal in dorsal view, but its contour fairly rounded and the posterior margin fairly concave; cornua absent; palps long and filiform, article 2 very long; hypostome, dentition 4/4, the most internal rows of teeth very fine.

Venter. Genital orifice between coxae 2; anal grooves round the anus behind, not reaching the genital grooves; post-anal median groove not reaching the middle festoon; 3 small ventral plaques usually present close to the festoons; spiracles elongate comma-shaped.

Legs. Coxa 1 bifid; coxae 2 and 3 each with a broad short spur; coxa 4 with a fairly long spur. Tarsi tapering abruptly, with 2 short spurs.

Measurements

No.	Scutum		Capitulum	Basis capituli	
	length	width		length	width
1	5.3	4.4	1.65	0.60	1.0
2	5.3	4.4	1.65	0.60	1.0
3	5.3	4.3	1.65	0.60	1.0
4	5.7	4.8	1.75	0.60	1.1
5	4.5	3.7	1.35	0.50	0.9
6	4.6	3.8	1.50	0.55	0.9

Female. Body short oval, with very short hairs; festoons well-marked; marginal grooves including all festoons; fully gorged specimens may attain 23 mm × 19.3 mm.

Scutum ornate, triangular, the postero-lateral sides reddish brown; cervical grooves shallow and concave externally, almost reaching the borders of the scutum; lateral grooves absent; scapulae small and fairly sharp; punctations deep and larger.

Eyes flat, large, situated at about the anterior third of the scutal length.

Capitulum ornate and long. Basis pentagonal in dorsol view, contour fairly rounded; cornua absent; porose areas well-defined, oval, oblique, diverging anteriorly, their distance equal to their short diameter. Palps filiform, article 2 largest. Hypostome, dentition 4/4, the median teeth very fine.

Venter. Genital orifice between coxae 2; anal grooves round the anus behind, not reaching the genital grooves. post-anal median groove almost reaching the posterior margin of the body. Spiracles triangular, with rounded corners, macula intero-anterior.

Legs. Coxa 1 bifid, coxae 2 and 3 each with a short, broad spur, coxa 4 with a longer spur. Tarsi as in the male.

Measurements

No.	Scutum		Capitulum	Basis capituli	
	length	width		length	width
1	2.70	3.3	1.70	0.55	1.10
2	2.60	3.3	1.50	0.55	1.15
3	3.10	3.5	1.70	0.60	1.20
4	2.60	3.4	1.65	0.60	1.25
5	2.90	3.5	1.65	0.60	1.25

The specimens were taken from cattle, water buffaloes, pigs and a wild boar.
 Hab. Formosa (Taito, Kohsyun, Taihoku).

4. *Haemaphysalis hystrix* SUPINO.

Fig. 19-23.

Male. Scutum light yellow, oval, a little narrow in front; cervical grooves indicated by the very faint, shallow, divergent depressions, beginning as the small pits situated rather behind the anterior border; lateral grooves absent; punctations small and very inconspicuous; festoons a little longer than broad.

Capitulum: basis rectangular, with somewhat strong and blunt cornua; palps a little salient laterally; the inner dorsal border of article 2 represents a small tuberosity anteriorly; article 3 with a fairly strong dorsal retrograde spine on the middle of the posterior border and also with a strong ventral retrograde spine. *Hypostome:* dentition 4/4, strong teeth of almost equal size.

Venter. Genital orifice between coxae 2. Spiracles short comma-shaped.

Lengs. Coxa I with a fairly strong, blunt spur; coxae 2, 3 and 4 each with a short spur; trochanters 1 and 2 respectively with a short blunt spur; tarsus 4 moderate, tapering rather rapidly.

Measurements

No.	Scutum		Capitulum	Basis capituli	
	length	width		length	width
1	2.46	1.93	0.56	0.25	0.44
2	2.46	2.00	0.53	0.20	0.44
3	2.66	2.00	0.53	0.20	0.46
4	2.60	1.92	0.56	0.22	0.46

Female. Scutum light brown, subcircular; cervical grooves shallow, fairly concave externally, reaching the border, median field at its narrowest part as broad as the lateral field; lateral grooves absent; scapulae blunt; punctations fine and inconspicuous. Festoons long and well defined; marginal grooves include 2 festoons.

Capitulum small. Basis rectangular in dorsal view; cornua short and blunt; porse areas large and ovoid, oblique, far apart, and a shallow depression in the middle of the interval. Palps strongly salient, longer than broad; article 2 longer than 3, its inner dorsal border with the indication of a tubercle anteriorly; article 3 represents a short, retrograde, dorsal spine on the middle of the posterior border and also a strong ventral spine. Hypostome: dentition 4/4, teeth of almost equal size.

Venter. Genital orifice between coxae 2. Spiracles comma-shaped.

Lengs. Coxa 1 with a fairly long internal spur; coxae 2, 3 and 4 each with a short spur; trochanters 1 and 2 each with a short spur; tarsi moderate, tapering gradually.

Measurements

No.	Scutum		Capitulum	Basis capituli	
	length	width		length	width
1	1.3	1.35	0.65	0.30	0.65
2	1.2	1.30	0.65	0.30	0.65
3	1.1	1.40	0.70	0.30	0.65
4	1.15	1.40	0.70	0.30	0.65

The specimens were taken from a dog and a wild boar.

Hab. Formosa (Taito, Taihoku).

5. *Haemaphysalis flava* NEUMANN.

Fig. 24-26.

Male. Colour light brown. Scutum long-oval, narrow in front; cervical grooves short and faint; lateral grooves short, beginning about at half the scutal length and ending just behind the spiracles; punctations fine and faint; festoons long and curved.

Capitulum. Basis rectangular, with strong sharp cornua; palps short, longer than broad, no dorsal spines, article 2 slightly salient laterally, the ventral border of article 2 with a little prominent retrograde angle; article 3 with a strong ventral spine. Hypostome: dentition 5/5.

Venter light yellow; genital orifice between coxae 2; spiracles short comma-shaped.

Legs. Coxae 1, 2 and 3 each with a fairly long blunt spur; coxa 4 with a very long sharp spur (nearly equal to the width of the coxa); tarsus 4 rather short, tapering gradually.

Measurements

No.	Scutum		Capitulum	Basis capituli	
	length	width		length	width
1	2.25	1.57	0.44	0.20	0.37
2	2.30	1.61	0.44	0.21	0.37

Female. No female specimen in our collection.

The specimens were taken from a dog and a wild boar.

Hab. Formosa (Taito, Taihoku).

6. *Haemaphysalis formosensis* NEUMANN.

Fig. 27-29.

Male. Scutum light brownish-yellow, short-oval; cervical grooves slight oval pits; lateral grooves long and distinct, including 1 and half festoons; punctations shallow and inconspicuous: festoons long.

Capitulum. Base rectangular; cornua strong and blunt; palps short, very weakly salient laterally, with rounded contours and with-

out dorsal spines; article 2 a little longer than 3; article 3 with a retrograde spur ventrally. Hypostome short, dentition 6/6, the teeth of median 2 pairs of files very small.

Venter. Genital orifice between coxae, 2; spiracles pear-shaped.

Legs. Coxae 1-4 with small, rather sharp spurs; trochantal spurs small, trochanter 4 without spine; tarsus 4 tapering gradually, with a small ventral spur.

Measurements

No.	Scutum		Capitulum length	Basis capituli	
	length	width		length	width
1	2.25	1.67	0.42	0.15	0.39
2	2.34	1.85	0.42	0.16	0.40

Female. No female specimen in our collection,
The specimens were taken from a dog and a wild boar.

Hab. Formosa (Taito, Taihoku).

Literature

NUTTALL, Warburton, Cooper and Robinson: Ticks—A Monograph of the Ixodoidea. Cambridge University Press (1908-1915).

L. G. Neumann: Ixodidae. Berlin (1911).

Explanation of Plates IV—VIII.*Boophilus annulatus var. caudatus* (Neum.)

- Fig. 1. Dorsal view of the male. $\times 20$.
 „ 2. Ventral view of the same. $\times 20$.
 „ 3. Spiracle of the same. $\times 60$.
 „ 4. Spiracle of the female. $\times 60$.
 „ 5. Dorsal view of the same. $\times 20$.
 „ 6. Ventral view of the same. $\times 20$.

Rhipicephalus sanguineus Latr.

- „ 7. Dorsal view of the male. $\times 20$.
 „ 8. Ventral view of the same. $\times 40$.
 „ 9. Spiracle of the same. $\times 60$.
 „ 10. Spiracle of the female. $\times 60$.
 „ 11. Dorsal view of the same. $\times 20$.
 „ 12. Ventral view of the same. $\times 20$.

Amblyomma testudinarium Koch.

- „ 13. Dorsal view of the male. $\times 12$.
 „ 14. Ventral view of the same. $\times 12$.
 „ 15. Dorsal view of the female. $\times 12$.
 „ 16. Ventral view of the same. $\times 12$.
 „ 17. Spiracle of the male. $\times 30$.
 „ 18. Spiracle of the female. $\times 30$.

Haemaphysalis hystricis Supino.

- „ 19. Dorsal view of the male. $\times 20$.
 „ 20. Ventral view of the same. $\times 20$.
 „ 21. Dorsal view of the female. $\times 20$.
 „ 22. Spiracle of the male. $\times 60$.
 „ 23. Spiracle of the female. $\times 60$.

Haemaphysalis flava Neum.

- „ 24. Dorsal view of the male. $\times 20$.
 „ 25. Ventral view of the same. $\times 20$.
 „ 26. Spiracle of the same. $\times 60$.

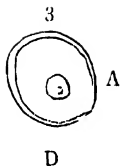
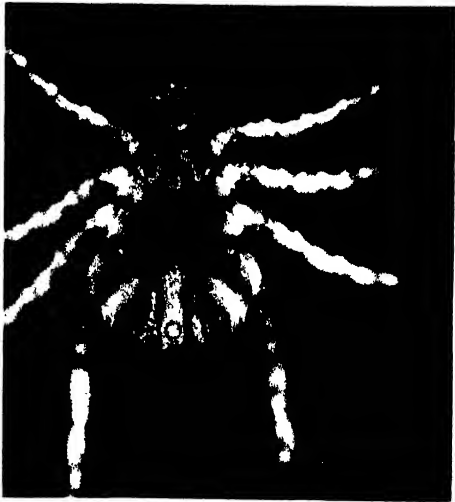
Haemaphysalis formosensis Neum.

- „ 27. Spiracle of the male. $\times 60$.
 „ 28. Dorsal view of the same. $\times 20$.
 „ 29. Ventral view of the same. $\times 20$.

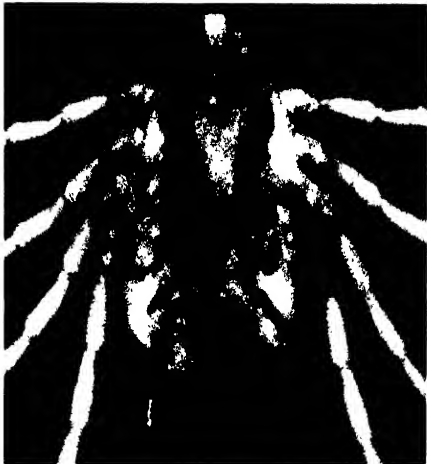
1



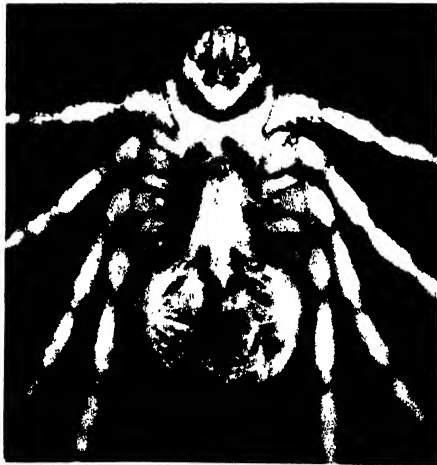
2



5



6



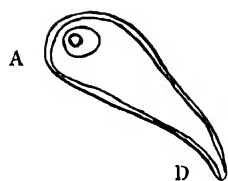
7



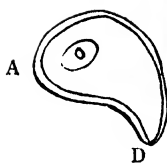
8



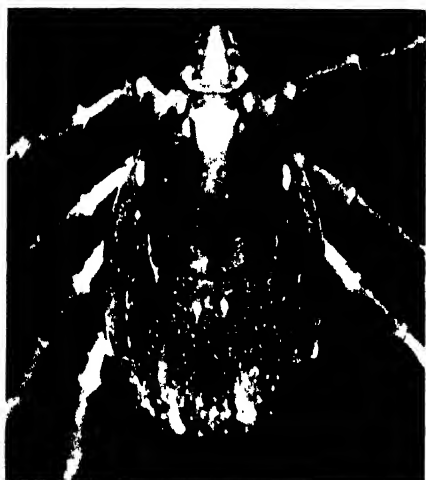
9



10



11



12



13



14

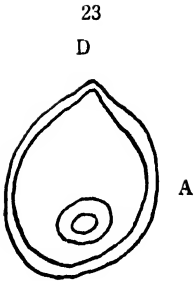
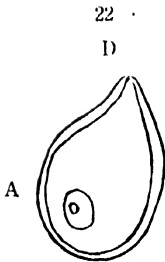
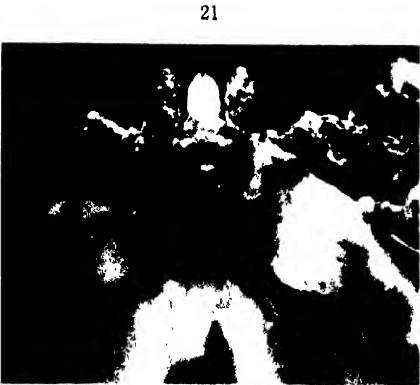
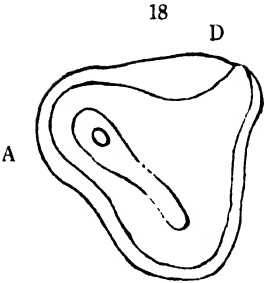
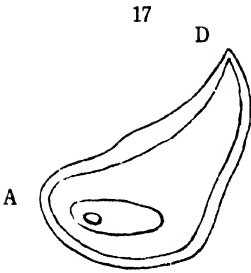


15



16





24

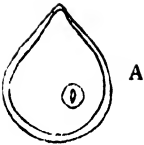


25



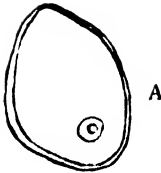
26

D



27

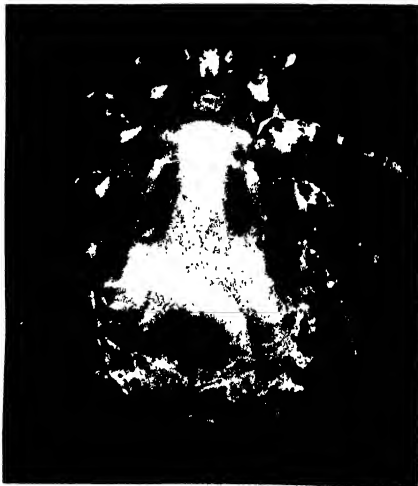
D



28



29



Rassenanatomische Untersuchungen der Hautstruktur vom Büffel, Zebu, Formosarind und Friesisch- Holländer im Hinblick auf das Problem der Tropenadaptation

Von

Jinshin YAMANE und Yutaka ONO

(Mit 15 Tabellen, 2 Textabbildungen und 4 Tafeln)

(Eingegangen am 11. Juni 1936)

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Einleitung	88
II. Material und Methode	91
1. Tiermaterial	91
2. Häutematerial	93
3. Fixierung und Schneiden	95
III. Untersuchungsergebnisse	95
1. Gesamthautdicke	95
2. Epidermis	101
3. Korium	102
4. Dichtigkeit der Behaarung... ..	106
5. Haarwurzellänge	111
6. Talgdrüse	111
7. Schweißdrüse	116
8. Befunde bei den Föten	122
IV. Zusammenfassung der Ergebnisse nach Rinderarten... ..	126
1. Hautstruktur des Büffels	127
2. Hautstruktur des Zebus	129
3. Hautstruktur des Formosarindes	131
4. Hautstruktur des Holländers	131
V. Allgemeine Zusammenfassung	133
VI. Literaturverzeichnis	135
VII. Tafelerklärung	136

I. EINLEITUNG

In tropischen und subtropischen Asien finden wir verschiedene Rinderarten, die als Haustiere in der Landwirtschaft eine grosse und wichtige Rolle spielen. In erster Linie käme darunter der Büffel (*Bubalus buffelus*, GRAY) in Frage. Seine Genügsamkeit und Widerstandsfähigkeit gegen klimatische Einwirkungen sind wohl bekannt; er ist in heissen sumpfigen Gegenden unschätzbar, besonders für den Reisbau unentbehrlich. So machen z. B. die Büffel vom heutigen Rinderbestand in Niederländisch-Indien etwa 1/3, auf den Philippinen 2/3 und auf Formosa, die südlichste Insel des japanischen Reichs, ebenso 2/3 aus. Als die zweite Rinderform in Südasiens ist der Zebu in Betracht zu ziehen. In Genügsamkeit und Widerstandsfähigkeit steht der Zebu (*Bos indicus*, LINN.) keineswegs dem Büffel nach. Besonders in heissen trockenen Gegenden ist der Zebu nicht nur für die Arbeitsleistung sondern auch für die Milchleistung unersetzbares Haustier umsomehr, als er gegen die Seuchen namentlich gegen die Piroplasmose sehr widerstandsfähig ist. Das Verbreitungsgebiet des indischen Zebus erstreckt sich somit auf ganz Britisch-Indien und Nachbarländer. Nicht geringere wirtschaftliche Stellung nehmen auch die Rinder von Bantengabstammung in der südasiatischen Haustierwelt ein. Wenn das reine Blut des Bantengs (*Bos sondaicus*, MÜLLER & SCHLEGEL) heutzutage auch nur im Balirind zu finden ist, sollen die Rinder des malaiischen Archipels nach MERKENS (1929) nichts anderes sein als die Kreuzungsprodukte zwischen dem Balirind d. h. dem domestizierten Banteng und dem indischen Zebu. Ferner, von Südchina über Formosa zu den Philippinen befinden sich auch sehr widerstandsfähige, gut akklimatisierte Landrassen, die wohl mit dem indischen Zebu sehr nahe verwandt ist.

Während nun die oben erwähnten, einheimischen Rinderarten in ihren Standorten gesund und leistungsfähig sind, stossen wir bei der Einführung der Rinderrassen von den gemässigten Zonen in die Tropen und Subtropen an die grossen Schwierigkeiten. Die Hauptschwierigkeit liegt hierbei darin, dass die hohe Temperatur event. in Verbind-

ung mit grosser Luftfeuchtigkeit und Wasserdampfspannung auf das Tier erschlaffend und appetitvermindernd wirkt. Hierzu kommt noch, dass in den heissen Zonen verschiedene Seuchen der Zucht der nordischen Rinderrassen hinderlich werden. So hat man auf Formosa vor etwa 30 Jahren bittere Erfahrungen gemacht, dass die ganzen Herde der europäischen Rinderrassen wie Simmentaler, Schweizerbraun, Devon, Ayrshire usw. sehr bald nach der Verpflanzung zugrunde gingen. Auch auf den Philippinen hat man neulich nach GONZALEZ (1932) die eher durchgeführten Akklimatisationsversuche der europäischen Rassen nicht nur mit den Rindern sondern auch mit den anderen Haustieren aufgegeben und das Zuchtziel nach der Kreuzung der europäischen Rassen mit den einheimischen Landschlägen gewendet.

Das gute Gedeihen der einheimischen Rinder und die schlechte Anpassung der nordischen Rinder in den tropischen und subtropischen Gegenden sind freilich den Art- oder gar Rasseneigenschaften zurückzuführen. Welche Art- oder Rasseneigenschaften dafür massgebend sind, wissen wir jedoch leider noch so gut wie nichts. Es sollte vom Standpunkt nicht nur der praktischen Tierzucht sondern auch der Haustierökologie aus jene Erscheinungen, die wir bisher als Unterschiede der Art- und Rasseneigenschaften annahmen, analytisch erforscht werden.

Selbstredend sind die Art- und Rasseneigenschaften bei einem Tier die Summe aller Teileigenschaften der einzelnen Organe oder Organsysteme; jedes Organ oder Organsystem hat eigene Art- und Rasseneigenschaften. Sollten wir nun Reizempfindlichkeit und entsprechende Reaktion verschiedener Rinderarten in tropischen und subtropischen Gegenden analytisch erforschen, so haben wir an einzelnen Organen oder Organsystemen vergleichende Untersuchungen anzustellen. Von diesem Gesichtspunkt haben wir zunächst die anatomisch-histologische Struktur der Haut in Betracht gezogen, denn die Haut ist klimatischen Einwirkungen als die anderen Organe in höherem Grade ausgesetzt und ihre Reagierbarkeit darauf ist vielfach betont worden. So hat zunächst WILCKENS (1893) einige Zahlenbeispiele für

den klimatischen Einfluss auf die Haut angegeben. Danach hat das ungarische Steppenrind in der trockenen warmen ungarischen Tiefebene eine fast dreimal so dicke Epidermis und ein fast doppelt so dickes Korium als die Alpenrassen im feucht kühlen Alpenklima (zit. nach DUERST 1931, S. 287). DUERST (1931, S. 291) erklärt über die im Tropenklima vor sich gehenden Anpassungserscheinungen der Haut folgenderweise: „Im heissen Klima bleibt zwar der erschwerte Sauerstoffaustausch und ebenfalls die Blutkonzentration, doch hörten wir schon, dass in trockenen, heissen Klimaten dann eine gewaltige Perspiratio insensibilis einsetzt, zu deren Vermeidung Haarverluste und stärkere Oberhautverhornung und vermehrte Talgdrüsenfunktion eintritt. Es bleiben die vorigen Verhältnisse also bestehen, doch tritt nunmehr die vermehrte Konzentration der Haut, ihr Wasserverlust hinzu, also deren relatives Dünnerwerden, das gewissermassen bloss ein Austrocknen bedeutet. Deshalb sind die sog. Wildhäute der Gerberei, die Häute afrikanischer, südamerikanischer und asiatischer Rinder sehr beliebt und geschätzt, falls sie gut gewonnen sind. Darum haben auch die Zebu- (Kips) Häute Indiens stets nur eine geringe Hautstärke.“

Für derartige Auffassung haben wir jedoch bisher keine sicheren Kriterien, die auf experimenteller Basis stehen. Es hat daher die vergleichenden Untersuchungen der Hautstruktur verschiedener Rinderarten in den Tropen, den Subtropen und den gemässigten Zonen von neuem auszuführen.

Unsere Fragestellungen sind daher:

1. Was sind Unterschiede im histologischen Bau der Haut zwischen den in den Tropen, Subtropen und den gemässigten Zonen einheimischen Rinderarten?

2. Ob die event. ermittelten Differenzen zwischen Angehörigen verschiedener Arten mit der Fähigkeit der Tropenanpassung im Zusammenhang stehen?

II. MATERIAL UND METHODE

1. Tiermaterial

Die Hautstücke, die uns für Untersuchungen zur Verfügung standen, stammten aus je einem Stier und einer Kuh von dem formosanischen Hausbüffel, dem Sind-Zebu und dem formosanischen Rind, einem Stier und Kuhkalb des friesisch-holländischen Hausrindes, und einem Stier von dem Kankrej-Zebu (*vgl.* Tabelle 1).

TABELLE 1.

Übersicht über die Tiere, denen die Hautmaterialie entnommen wurden.

	Rinderart und -rasse	Geschlecht	Alter	Sektionstag	Bemerkungen
1	Formosa-Büffel	Stier	10 J.	13. Apr. 1932	Widerristshöhe 130,5 cm.
2	„	Kuh	13 J.	7. Apr. 1932	Widerristshöhe 129,0 cm.
3	Indischer Zebu, Sindrasse	Stier	10 J.	21. Apr. 1932	Rückenhöhe 123,7 cm.
4	„	Kuh	15 J.	18. Apr. 1932	Rückenhöhe 129,7 cm.
5	Indischer Zebu, Kankrejrassse	Stier	13 J.	25. Febr. 1932	Rückenhöhe 128,0 cm.
6	Formosa-Rind	Stier	15 J.	4. Febr. 1932	Widerristshöhe 137,0 cm.
7	„	Kuh	7 J.	30. Apr. 1933	Widerristshöhe 106,6 cm.
8	Europäisches Hausrind, Holländisch-friesische Rasse	Stier	5½ J.	20. Juni 1935	Widerristshöhe 149,0 cm, Körpergewicht 919 kg.
9	„	Kuhkalb	½ J.	15. Aug. 1932	

Der Hausbüffel auf der Insel Formosa kann nur als eine lokale Varietät des indischen Hausbüffels angesehen werden, die seit vordenklicher Zeit von Südchina eingeführt worden war. Die hier zur Sektion verwendeten Büffel gehörten zu einem Stamm, der in einer Filiale des Zuchtviehfarms der Zentralen Forschungsanstalt der Formosa-Regierung zu Kagi, Tainan-Provinz, Mittelformosa, gezüchtet worden war.

Das formosanische Hausrind, welches im Hinblick auf seine überwiegend vorkommende Haarfarbe von den Formosanern schlechtweg als Gelbvieh (*jap.* Kôgyû=黃牛) genannt wird, ist wohl mit dem indischen Zebu sehr nahe verwandt, denn der Stier zeigt einen kleinen Buckel vor dem Widerrist. Die Frage, ob das Formosarind eine lokale Varietät des indischen Zebus darstellt, oder ob es durch Kreuzung des indischen Zebus mit irgend einem Hausrind entstanden ist, muss erst nach sorgfältiger Untersuchung entschieden werden. Die hier uns zur Verfügung gestandenen Tiere waren die von einem Züchter in Sintiku-Provinz, Nordformosa, eingekauften.

Die Heimat des Sind- und Kankrej-Zebus ist bekanntlich die Bombay-Präsidenschaft in British-Indien.¹⁾ Die erstere Rasse gehört zu einer der milchergiebigsten Zebus und die letztere zeichnet sich durch ihre Zugleistung mit schnellem Tempo aus. In Formosa wurden die beiden Rassen seit Jahren zur Veredelung der oben erwähnten Landrasse importiert. Die drei, hier zur Sektion verwendeten Zebus waren die reinrassigen Tiere, die im Zuchtviehfarm der Zentralen Forschungsanstalt der Formosa-Regierung zu Kôsyun, Takao-Provinz, Südformosa, gezüchtet wurden.

Von zwei sezierten Friesisch-Holländern, die als Repräsentanten der europäischen Hausrindern hier gewählt wurden, war das männliche Tier, in Hokkaido, Nordjapan, geboren und 6 Monate nach der Geburt in die Zuchtviehfarm der Zentralen Forschungsanstalt der Formosa-Regierung zu Kôsyun, Takao-Provinz, eingeführt und dort zum Zuchtzweck aufgezogen. Wenn das hiesige Aufzuchtgebiet auch schon jenseits des nördlichen Wendekreises liegt, befand sich dieser Bulle in guter Zuchtkondition. Das andere friesisch-holländische Rind war ein in einer Molkerei zu Taihoku, Nordformosa, geborenes Kuhkalb; es war bei der Sektion nur noch 8 Monate alt.

1) Das Zuchtzentrum des Sind-Zebus ist Karachi und dasselbe des Kankrej-Zebus ist Ahmadabad

Ausser den oben erwähnten Tieren kamen noch drei Büffelföten und ein Formosarindsfötus hinzu, die gelegentlich im Schlachthof zu Taihoku verschaffen wurden :

- Büffelfötus Nr. 1. ♂ Nacken-Steiss-Länge 62,4 cm ; Brustumfang 59,9 cm ; Körpergewicht 20 kg.
Büffelfötus Nr. 2. ♀ Nacken-Steiss-Länge 38 cm ; Brustumfang 39 cm ; Körpergewicht 3,42 kg.
Büffelfötus Nr. 3. ♂ Nacken-Steiss-Länge 29 cm ; Brustumfang 30,5 cm ; Körpergewicht 1,85 kg.
Formosarindsfötus ♂ Nacken-Steiss-Länge 60,7 cm ; Brustumfang 55,5 cm ; Körpergewicht 15,5 kg.

Bei derartigen vergleichenden Untersuchungen, die Unterschiede nach Tierart, Rasse und Geschlecht aufzufinden sind, dürfte man noch Schwankungen nach Individualität, Alter und verschiedenen Körperregionen nicht vernachlässigen. Wohl mag es daher erstrebenswert sein, bei den Untersuchungen eine Anzahl der Individuen in verschiedenem Alter zu berücksichtigen. Aber nur in den seltensten Fällen wird man imstande sein, so umfassende Untersuchungen anzustellen. Glücklicherweise sind die Schwierigkeiten nicht so grosse beim Vergleich zwischen dem Büffel und den anderen Rindergeschlechtern. Schwieriger ist es schon beim Zebu, formosanischen und europäischen Hausrind Vergleiche zu machen. Auch bei den genannten Rindergeschlechtern ist jedoch der Vergleich nicht unmöglich, wenn man die erwachsenen Tiere von gleichem Geschlecht¹⁾ in Betracht zieht. Was der Altersunterschied betrifft, so mögen die an den oben erwähnten Föten gemachten Beobachtungen dazu dienen. Hinsichtlich der Schwankungen nach den verschiedenen Körperregionen hat man Probe aus möglichst vielen Hautstellen zu entnehmen.

2. Häutematerial

Für die Untersuchung der Haut erwählten wir folgende 21 Körperteile, um die Schwankungen nach verschiedenen Körperteilen möglichst genau zu bestimmen :

- 1) In unserem Fall die Stiere, da das Kuhmaterial beim Kankrej-Zebu und Holländer fehlte.

TABELLE 2.

Hautdicke, Dicke der Epidermis und des Korioms, und Hautkoeffizient in verschiedenen Körperregionen beim Büffel.

Körperregion	Stier				Kuh			
	Kutis in μ	Epid. in μ	Korium in μ	Hautkoeff.	Kutis in μ	Epid. in μ	Korium in μ	Hautkoeff.
1. Regio frontalis	7650	105	7545	13,7	6750	120	6630	17,8
2. R. brachiocephal.	7650	75	7575	9,8	7500	85	7415	11,3
3. R. interscapul.	5950	130	5820	21,8	6050	120	5930	19,8
4. R. scapularis	6950	90	6860	12,9	7200	75	7125	10,4
5. R. dorsalis	6600	75	6525	11,4	6050	120	5930	19,8
6. R. costalis	7150	130	7020	18,2	7950	180	7770	22,6
7. R. epigastrica	8250	90	8160	10,9	7450	70	7280	9,4
8. R. umbilic. ant.	7900	60	7840	7,6	6150	100	6050	16,3
9. R. umbilic. post.	7650	60	7590	7,8	6300	60	6240	9,5
10. R. mammalis	6050	55	5995	9,1	5750	45	5705	7,8
11. R. lumbalis	6250	90	6160	14,4	6900	120	6780	17,4
12. Fossa paralumb.	5050	80	4970	15,8	10040	75	9965	7,5
13. R. glutaee	8100	130	7970	16,0	7000	75	6925	0,7
14. R. glutaee post.	7450	90	7360	12,1	6650	80	6570	12,0
15. R. axillaris	8250	60	8190	7,3	6250	75	6175	12,0
16. R. antebrach. later.	6250	95	6155	15,2	4350	75	4275	17,2
17. R. antebrach. med.	5600	90	5510	16,1	4250	110	4140	25,9
18. R. cruralis later.	7100	105	6995	14,8	5750	85	5665	14,8
19. R. cruralis med.	7010	65	6945	9,3	5750	55	5695	9,6
20. R. metacarpea	4550	150	4400	33,0	5250	150	5100	28,6
21. R. metatarsea	5000	120	4880	24,0	5000	130	4870	26,0
Im Durchschnitt	6781	93	5855	13,7	6397	96	6301	15,0

TABELLE 3.

Hautdicke, Dicke der Epidermis und des Koriums, und Hautkoeffizient
in verschiedenen Körperregionen beim indischen Zebu.

Körperregion	Sind								Kankrej			
	Stier				Kuh				Stier			
	Kutis in p	Epid. in p	Korium in p	Hautkoeff.	Kutis in p	Epid. in p	Korium in p	Hautkoeff.	Kutis in p	Epid. in p	Korium in p	Hautkoeff.
1. Regio frontalis	8500	90	8410	10,6	4500	60	4440	13,3	6000	60	5940	10,0
2. R. brachiocephal.	10000	90	9910	9,0	4000	30	3970	7,5	7500	45	7455	6,0
3. R. interscapul.	—	—	—	—	3500	50	3450	14,3	5000	60	4940	12,0
4. R. scapularis	6500	60	6440	9,2	3000	45	2955	15,0	5000	60	4940	12,0
5. R. dorsalis	5000	75	4925	15,0	3500	60	3440	17,1	4000	60	3940	15,0
6. R. costalis	5000	75	4925	15,0	4000	40	3960	10,0	5000	45	4955	9,0
7. R. epigastrica	6500	60	6440	9,2	5000	60	4940	12,0	8500	60	8440	7,1
8. R. umbilic. ant.	4000	60	3940	15,0	5000	60	4940	12,0	6500	60	6440	9,2
9. R. umbilic. post.	6500	80	6420	12,3	5500	60	5440	10,9	8500	90	8410	10,6
10. R. mammalis	8500	60	8440	7,1	2000	30	1970	15,0	7500	40	7460	5,3
11. R. lumbalis	6000	90	5910	15,0	4000	60	3940	15,0	4000	75	3925	18,8
12. Fossa paralumb.	5500	75	5425	13,6	5500	45	5455	8,2	6000	50	5950	8,3
13. R. glutaes	6000	120	5880	20,0	5000	45	4955	9,0	4500	70	4430	15,6
14. R. glutaes post.	4500	60	4440	13,3	4000	25	3975	6,3	5500	55	5445	10,0
15. R. axillaris	5000	30	4970	6,0	3000	90	2910	30,0	5000	65	4935	13,0
16. R. antebrach. later.	5000	90	4910	18,0	2500	30	2470	12,0	4000	50	3950	12,5
17. R. antebrach. med.	5000	90	4910	18,0	3000	30	2970	10,0	4500	45	4455	10,0
18. R. cruralis later.	6000	60	5940	10,0	5000	30	4970	6,0	6000	75	5925	12,5
19. R. cruralis med.	7000	60	6940	8,6	5000	80	4920	16,0	5000	65	4935	13,0
20. R. metacarpea	3000	75	2925	25,0	3500	60	3440	17,1	4000	50	3950	12,5
21. R. metatarsea	5000	75	4925	15,0	4000	45	3955	11,3	4000	45	3955	11,3
Im Durchschnitt	5925	74	5851	12,5	4024	49	3976	12,2	5524	58	5466	10,5

TABELLE 4.

Hautdicke, Dicke der Epidermis und des Koriurns, und Hautkoeffizient
in verschiedenen Körperregionen beim Formosarind.

Körperregion	Stier				Kuh			
	Kutis in μ	Epid. in μ	Korium in μ	Hautkoeff.	Kutis in μ	Epid. in μ	Korium in μ	Hautkoeff.
1. Regio frontalis	8750	75	8675	8,6	5050	60	4990	11,9
2. R. brachiocephal.	7850	55	7795	7,0	7000	60	6940	8,6
3. R. interscapul.	7100	50	7050	7,0	5100	45	5055	8,8
4. R. scapularis	4150	55	4095	13,3	4650	45	4605	9,7
5. R. dorsalis	6700	55	6645	8,2	5800	50	5750	8,6
6. R. costalis	5850	80	5790	13,7	6250	50	6200	8,0
7. R. epigastrica	7450	120	7410	16,1	5100	40	5060	7,8
8. R. umbilic. ant.	5700	50	5650	8,8	4400	45	4355	10,2
9. R. umbilic. post.	5000	45	4955	9,0	5250	50	5200	9,5
10. R. mammalis	7200	35	7165	4,9	5500	30	5470	5,5
11. R. lumbalis	6150	43	6107	7,0	6750	40	6710	5,9
12. Fossa paralumb.	6450	100	6350	15,5	7400	55	7345	7,4
13. R. glutea	5900	70	5830	11,9	6200	50	6150	8,1
14. R. glutea post.	6750	55	6695	8,1	6050	45	6005	7,4
15. R. axillaris	6250	35	6215	5,6	4300	60	4240	14,0
16. R. antebrach. later.	5350	50	5300	9,3	4050	35	4015	8,6
17. R. antebrach. med.	3600	45	3555	12,5	4200	30	4170	7,1
18. R. cruralis later.	6550	50	6500	7,6	6200	50	6150	8,1
19. R. cruralis med.	4900	50	4850	10,2	6150	38	6112	6,2
20. R. metacarpea	4150	50	4100	12,0	4150	45	4105	10,8
21. R. metatarsea	4250	27	4223	6,4	3850	50	3800	13,0
Im Durchschnitt	6002	51	5950	8,5	5401	43	5353	8,9

TABELLE 5.

Hautdicke, Dicke der Epidermis und des Koriums, und Hautkoeffizient
in verschiedenen Körperregionen beim Friesisch-Holländer.

Körperregion	Stier				Kuhkalb			
	Kutis in p	Epid. in p	Korium p	Hautkoeff.	Kutis in p	Epid. in p	Korium in p	Hautkoeff.
1. Regio frontalis	15500	90	15410	5,8	5650	80	5570	14,2
2. R. brachiocephal.	14450	70	14380	4,8	6650	50	6600	7,5
3. R. interscapul.	8450	80	8370	9,5	4600	45	4565	9,8
4. R. scapularis	6800	58	6742	8,5	4800	35	4765	7,3
5. R. dorsalis	7300	100	7200	13,7	6350	55	6295	8,7
6. R. costalis	6000	72	5928	12,0	7100	35	7065	4,9
7. R. epigastrica	9250	60	9190	6,5	4050	35	4015	8,6
8. R. umbilic. ant.	8150	53	8097	6,5	4500	35	4465	7,8
9. R. umbilic. post.	7000	68	6932	9,7	4300	60	4240	14,0
10. R. mammalis	10050	57	9993	5,7	6150	50	6100	8,1
11. R. lumbalis	6100	82	6018	13,4	5150	30	5120	5,8
12. Fossa paralumb.	6500	80	6420	12,3	7100	43	7057	6,1
13. R. glutaeta	6850	52	6798	7,6	6550	80	6470	12,2
14. R. glutaeta post.	9200	80	9120	8,7	5150	40	5110	7,8
15. R. axillaris	12000	60	11940	5,0	4300	50	4250	11,6
16. R. antebrach. later.	6950	97	6853	14,0	4300	35	4265	8,1
17. R. antebrach. med.	8050	65	7985	8,1	4300	35	4265	8,1
18. R. cruralis later.	7950	70	7880	8,8	5750	55	5695	9,6
19. R. cruralis med.	8900	105	8795	11,8	6000	55	5945	9,2
20. R. metacarpea	5500	85	5415	15,5	4050	70	3980	17,3
21. R. metatarsea	4950	125	4825	25,3	4600	40	4560	8,7
Im Durchschnitt	8376	77	8300	9,2	5305	48	5255	9,3

Der erste Blick auf die obigen Tabellen zeigt, dass die Gesamthautdicke nach Körperregion sehr unregelmässig schwankt, wenn auch die individuelle Verschiedenheit dabei nicht ausgeschlossen ist. Im allgemeinen lässt es sich jedoch sagen, dass bei allen Fällen die maximale Stärke an der Stirn, dem Hals und dem Widerrist und die minimale Stärke an den Extremitäten sich befindet. Die anderen Körperteile lassen sich bezüglich der Hautdicke ihre Reihenfolge nicht leicht bestimmen.

Nach AMSCHLER (1928), dem wir über die Hautdicke der europäischen Rinderrassen (Fleckvieh- und Allgäuerrasse) die umfangreichsten Untersuchungen verdanken, schwankt die Hautdicke selbst innerhalb ein und derselben Körperregion sehr unregelmässig. Der genannte Autor gibt für die Stierhäute an, dass die grösste Unregelmässigkeit sich an der Kopf- und Halshaut, in der Kreuzgegend gegen den Schwanz zu, an der Innenseite der Beine, an der Bauchseite, sowie an den Flämmen zeige. Auch bei unserem Material scheint dieselbe Unregelmässigkeit wie beim europäischen Höhenvieh vorhanden zu sein. Trotz dieser Mannigfaltigkeit sowie der Unregelmässigkeit in der Hautdicke bei verschiedenen Körperstellen lässt sich ein gewisser Geschlechtsunterschied an einigen Gegenden wie Stirn, Hals und Rücken erkennen, wo schon am Exterieur sekundäre Geschlechtsmerkmale in den Vordergrund treten; der Stier hat immer eine dickere Haut als die Kuh. Vergleicht man nun Durchschnittswerte für die hier in Betracht gezogenen Körperregionen bei jedem Tier, so kommt dieser Geschlechtsunterschied in der Gesamthautdicke beim Sind-Zebu und Formosarind besonders zum Ausdruck: männliche Tiere 5925 resp. 6002 μ , weibliche Tiere 4024 resp. 5401 μ . In dieser Hinsicht verhält sich die Büffelhaut etwas anders; die durchschnittliche Hautdicke des männlichen Tieres (6781 μ) ist wenig grösser als die des weiblichen (6397 μ). Der enorme Unterschied zwischen Stier und Kuhkalb beim Holländer (Stier 8376 μ , Kuhkalb 5305 μ) ist allerdings nicht als Geschlechtseinfluss vielmehr als Alterseinfluss zu betrachten. Dies stimmt wohl mit dem Befunde von SCHOTTERER (1933) überein, dass die dünnste Haut innerhalb gleicher Altersstufen im weiblichen

und die bei weitem dickste im männlichen Geschlecht zu finden sei, und ferner, dass diese geschlechtsbedingten Unterschiede um so grösser seien, je höher das Alter der Individuen sei.

Was die Art- und Rassenunterschiede betrifft, so treten sie unter den männlichen Tieren ziemlich ausgeprägt zutage. Die höchsten Dickenwerte (durchschnittlich 8376 μ) kommen beim Holländerstier und die kleinsten Dickenwerte (durchschnittlich 5524 μ) beim Kankrejstier. Es folgt dem Holländerstier Büffel-, Formosa- und Sindtiere (durchschnittlich resp. 6781 μ , 6002 μ und 5925 μ). Dieselbe Reihenfolge scheint auch für die Kuhhäute gültig zu sein, obwohl unser Häutematerial von den Kühen zum Analogieschluss noch zu gering ist.

2. Epidermis

Beim Hausrind und Zebu sowie auch beim Büffel besteht die Epidermis im allgemeinen aus mehrschichtigem Plattenepithel, das meistens zwei scharf voneinander getrennte Lagen unterscheiden lässt; eine oberflächliche, die Hornschicht, und eine tiefe, die Keimschicht. Die Hornschicht, stellt im allgemeinen eine Lage der verhornten Zellen dar, abgesehen vom Büffel, bei dem die Zellen stellenweise noch im Zustand der Parakeratose sich befinden. Ihre Dicke schwankt scheinbar mit der Epidermisdicke Hand in Hand. Die Keimschicht besteht aus mehreren Lagen der Stachelzellen und einer Lage der auf die Basalmembran sitzenden Zylinderzellen. Bei allen hier untersuchten Tierexemplaren liess sich das Stratum lucidum nicht nachweisen, während das Stratum granulosum an einigen Körperregionen mit dicker Epidermis nur streckenweise ausgebildet war.

In der Entwicklung der Epidermis erweist sich wieder gewisse Unterschiede nach Art, Rasse, Geschlecht und Körperregion (Tabelle 2-5). Die stärkste Epidermis hat der Büffel, es folgen dann Holländer, Sind- und Kankrejzebu, und Formosarind. Der Durchschnittswert bei den männlichen Tieren beträgt nämlich resp. 93 μ , 77 μ , 74 μ , 58 μ , und 51 μ . Berechnet man aber den Hautkoeffizienten nach DUERST (1931), und zwar aus der Formel

$$\frac{\text{Epidermisdicke} \cdot 1000}{\text{Gesamtkutisdicke}}$$

so erhält man im Durchschnitt :

	männlich	weiblich
Büffel	13,7	15,0
Sind-Zebu	12,5	12,2
Kankrej-Zebu	10,5	—
Formosarind	8,5	8,9
Holländer	9,2	—

Hieraus folgt, dass Büffel und Zebu relativ dickeren Epidermis besitzen als Formosarind und Holländer. Auch die Epidermisdicke ist beim Stier stärker als bei der Kuh; dieser Geschlechtsunterschied ist besonders an den Regionen von Schulter, Widerrist und Gesäss merklich. Bei demselben Tier zeigen die Hautstellen auf der Rücken-seite wie Stirn, Rücken und Gesäss die stärkste Epidermis und diejenige auf der Bauchseite wie Achsel und Unterbauch die schwächste. Kurz gesagt, die äusseren Einwirkungen in höherem Masse ausgesetzten Körperteilen besitzen eine dickere Epidermis als die geschützten Teile. Auch in der Entwicklung der Hornschicht lässt sich gewisse Art- und Rassenunterschiede erkennen, wenn man die Durchschnittswerte der männlichen Tiere vergleicht. Diese Schicht ist beim Büffel (28μ), Formosarind (27μ) und Holländer (25μ) stärker gebildet als bei den Zebus ($9-12\mu$).

3. Korium

Das Korium, worauf die Kutisdicke hauptsächlich beruht, zerfällt in zwei deutlich unterscheidbare Schichten, welche aber in einigen Hautstellen ohne scharfe Grenze ineinander übergehen; eine oberflächliche Schicht, Stratum papillare, und eine tiefere Schicht, Stratum reticulare. In der Papillarschicht sind die Bindegewebsfasern stets fein und bilden ein dichtes Geflecht, in ihren oberen Lagen sogar konfluierend. Die Retikularschicht kennzeichnet sich durch gröbere Bindegewebszüge, die im allgemeinen mit der Hautfläche parallel verlaufen und ein lockeres Geflechtes bilden. Nach den Messungen sind die Stärke einzelner Bindegewebsfasern in der Retikularschicht bei jeder Art und Rasse 2 bis 3 mal grösser als in der Papillarschicht (Tabelle 6).

In der Stärke der Bindegewebsfasern ist ein gewisser Artunterschied zu erkennen; sie ist beim Büffel viel stärker als bei den anderen Rindergeschlechtern (Tabelle 6). Auch in der Dichte und dem Verlauf der Koriumfasern ist der Büffel ganz charakteristisch. Beim Büffel zeigen die Koriumfasern viel schwächere Windungen und lockerere Verflechtungen als bei den anderen Rindergeschlechtern (*Taf. X, Abb. 2; Taf. XII, Abb. 2*). Beim Holländer ist die Bindegewebstextur der beiden Koriumschichte ist dagegen am dichtesten und die Windungen und Verflechtungen sind hier viel ausgeprägter (*Taf. XI, Abb. 2*). In diesem Verhalten liegen die Zebus und das Formosarind zwischen dem Büffel und dem Holländer (*Taf. XI, Abb. 1; Taf. XII, Abb. 1*).

TABELLE 6.

Mittelwert und mittlerer Fehler der Stärke der Bindegewebsfasern in der Papillar- und Retikularschicht der Stirnhaut (an 10 Fibrillenbündelindividuen gemessen).

	Stärke der Bindegewebsfasern in der Papillarschicht in μ	Stärke der Bindegewebsfasern in der Retikularschicht in μ
Büffeltier	13,58 \pm 0,553	29,13 \pm 0,541
Büffelkuh	11,89 \pm 0,268	26,40 \pm 0,240
Sindstier	11,17 \pm 0,297	26,08 \pm 0,421
Sindkuh	8,98 \pm 0,380	25,72 \pm 0,328
Kankrejtstier	9,73 \pm 0,339	25,68 \pm 1,087
Formosastier	10,36 \pm 0,185	26,13 \pm 0,567
Formosaku	10,30 \pm 0,351	24,45 \pm 0,429
Holländerstier	10,17 \pm 0,225	26,32 \pm 0,764
Holländerkuhkalb	7,08 \pm 0,319	16,42 \pm 0,607

Der in der Papillarschicht sich befindliche Papillarkörper ist sehr verschiedentlich ausgebildet. Selbst am selben Individuum sind die Papillen im allgemeinen an dicht behaarten Körperteilen nur schwach oder gar nicht entwickelt, während sie an dünn behaarten

Hautstellen sich gut entwickelt finden. Dieses Verhalten scheint auch für die verschiedene Rinderarten und -rassen gültig zu sein. Während nun der Papillarkörper beim dicht behaarten Rindergechlecht wie Zebu, Formosarind und Holländer relativ schwache Zackungen zeigt, ist er beim dünn behaarten Büffel äusserst unregelmässig und stark entwickelt. Daraus ergibt sich die allgemeine Regel, dass wenn die Haut dünn behaart ist, der Papillarkörper stark entwickelt ist, und wenn die Haut dicht behaart, der Papillarkörper nur schwach entwickelt ist.

Die Dicke einzelner Schicht des Koriums besonders der Papillarschicht ist auch nach Tierart, Rasse und Geschlecht, ausserdem noch am selben Individuum nach Körperregion sehr variierend (Tabelle 7).

Die Papillarschicht ist auffallenderweise beim Holländer ($1273\ \mu$) am stärksten entwickelt, während sie beim Büffel ($809\ \mu$) weniger und bei den Zebus ($601\text{--}656\ \mu$) und dem Formosarind ($633\ \mu$) am schwächsten gebildet ist. Die stärkste Entwicklung dieser Hautschicht beim Holländer ist auch beim Kuhkalb ($982\ \mu$) zu erkennen. Da die Papillarschicht, wie schon erwähnt, aus den feinen Bindegewebsfasern besteht, dazu noch Haarwurzeln und Hautdrüsen in sich enthält, steht es sich von selbst, dass der Holländer trotz der grössten Hautstärke die weichere, geschmeidigere Haut besitzt als der Büffel und die Zebus.

Der geschlechtliche Unterschied in der Entwicklung der Papillarschicht ist beim Sind-Zebu mehr oder weniger zu finden, während er beim Büffel und Formosarind fast unbedeutend ist. Am selben Individuum ist die Papillarschicht im allgemeinen an den weniger ausgesetzten Körperteilen wie Bauch, Achsel, Euter usw. mehr entwickelt.

Aus den obigen Befunden über den Unterschied in der Entwicklung der Papillarschicht sowohl nach Art oder Rasse als auch nach Körperregion am selben Individuum lässt sich schliessen, dass die Weichheit und Elastizität der Rinderhaut bei der Palpation, worauf man in der Praxis im Zusammenhang mit den Leistungen der Rinder ein grosses Gewicht zu legen pflegt, nicht durch absolute Dicke der Gesamthaut sondern durch relative Dicke der Papillarschicht bedingt wird.

TABELLE 7.

 Dicke des Koriums—Stratum papillare und Stratum reticulare—in μ nach Art, Rasse, Geschlecht und Körperregion geordnet.

Körperregion	Indische Zebus						Formosarind						Holländer					
	Büffel			Sind			Kankrej			Stier			Stier			Kuhkalb		
	Stier			Stier			Stier			Stier			Stier			Stier		
	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.	Str. pa. Str. re. Str. re. Str. re.
1. Regio frontalis	750	6795	900	5730	750	7660	600	3840	1050	4890	800	7875	680	4310	1760	13650	1080	4490
2. R. brachiocephal.	600	6975	600	6815	600	9310	750	3220	450	7005	820	6975	605	6335	990	13390	920	5680
3. R. interscapul.	750	5070	690	5240	600	—	450	3000	600	4310	510	6540	640	4415	1480	6890	620	3945
4. R. scapularis	600	6260	660	6165	750	5690	450	2505	450	4490	620	3475	525	4030	700	6042	880	3885
5. R. dorsalis	990	5535	750	5180	450	4475	540	2910	510	3430	720	5945	520	5230	1290	5910	1010	5285
6. R. costalis	900	6120	750	7020	300	4625	300	3660	510	4445	560	5230	520	5680	650	5278	920	6145
7. R. epigastrica	1050	7110	1350	6030	750	5690	750	4190	900	7540	540	6870	615	4445	1440	7750	1120	2895
8. R. umbilic. ant.	900	6940	900	5150	750	3190	600	4340	750	5690	630	5020	820	3535	1570	6527	1080	3385
9. R. umbilic. post.	1050	6540	960	5280	900	5520	750	4690	600	7810	820	4135	835	4365	1260	5672	1120	3120
10. R. mammaris	1200	4795	1350	5355	900	7540	600	1370	660	6800	800	6365	1040	4430	1735	8258	1450	4650
11. R. lumbalis	450	5719	900	5890	600	5310	450	3190	600	3325	540	5567	500	6210	1420	4598	1080	4040
12. Fossa paralumb.	750	4220	600	9365	750	4675	600	4855	450	5500	830	5470	480	6865	680	5740	940	6117
13. R. glutea	750	7220	600	6325	510	5370	450	4505	510	3920	710	5120	615	5535	1040	5758	920	5550
14. R. glutea post.	600	6760	660	5910	450	3790	450	3525	450	4995	620	6075	400	5605	1040	8030	880	4230
15. R. axillaris	900	7290	1050	5125	600	4370	750	2160	1200	3735	540	5675	835	3405	1870	10070	1030	3220
16. R. antebach. later.	750	5405	750	3525	750	4160	600	1870	390	3560	610	4690	600	3415	1280	5573	920	3345
17. R. antebach. med.	900	4610	900	3240	900	4010	900	2070	450	4005	500	3055	605	3565	1190	6795	860	3405
18. R. cruralis later.	750	6245	600	5055	600	5340	430	4520	450	5475	650	5850	620	5530	1480	6400	1010	4685
19. R. cruralis med.	900	6045	900	4795	600	6340	450	4470	600	4335	520	4330	625	5487	1720	7075	960	4985
20. R. metacarpea	750	3650	660	4440	600	2325	450	2990	600	3350	480	3620	520	3385	1040	4375	900	3080
21. R. metatarsea	690	4190	750	4120	600	4325	450	3505	450	3505	430	3793	540	3260	1100	3725	915	3645
Im Durchschnitt	809	5046	823	5478	656	5186	547	3428	601	4864	633	5317	626	4728	1273	7026	932	4274

4. Dichtigkeit der Behaarung

Bei allen hier in Betracht gezogenen Rindergeschlechtern kommt die Gruppenstellung der Deckhaare nicht zum Ausdruck. Die Dichtigkeit der Körperbehaarung kann daher mit der Zahl der Haarindividuen pro qcm Hautfläche ohne Schwierigkeit gezeigt werden. Hierfür wurde zunächst die Zahl der Haarindividuen an einem Gesichtsfeld der Flächenschnitte des Hautstückes unter 50 facher Vergrößerung mittels eines Netzkokulars bestimmt, um dann in diejenige pro qcm Hautfläche umgerechnet zu werden. Dass derartige einfache Bestimmung schon zuverlässig ist, erweist sich der folgende Vorversuch. Es wurde nämlich die Haare bei einem formosanischen Stier in 8 beliebig genommenen Gesichtsfeldern in ein und demselben Hautstück gezählt und der Mittelwert und die Standardabweichung berechnet (Tabelle. 8). Es hat sich dabei herausgestellt, dass alle Varianten für die untersuchten Körperteile, abgesehen von zwei Körperteilen (*R. axillaris* und *R. cruralis medialis*) im Spielraum $M \pm 2,0 \sigma$ und, dass selbst in den genannten zwei Ausnahmefällen ihre Varianten sich im Spielraum $M \pm 2,5 \sigma$ finden. Wir wissen schon, dass sich bei den Spielräumen $M \pm 2,0 \sigma$ und $M \pm 2,5 \sigma$ 95,5 % bzw. 98,8 % der Varianten innerhalb ihres Spielraumes liegen. Wir haben somit Grund anzunehmen, dass die einmalige Zählung der Haare für ein und dasselbe Hautstück für unseren Zweck befriedigend ist.

Die Ergebnisse der Bestimmungen sind in Tabelle 9 zusammengestellt.

Wie man bei den Beobachtungen der lebenden Tieren leicht zu erwarten ist, ergab sich bei den mikroskopischen Bestimmungen, dass die Büffel bezüglich der Haardichtigkeit von den anderen Rindergeschlechtern gründlich verschieden ist. Während nun der Durchschnittswert der Haarzahl pro qcm Hautfläche beim männlichen Sind-Zebu 1570 und beim weiblichen 1823, beim männlichen Kankrej-Zebu 2024, beim männlichen Formosarind 1160 und beim weiblichen 1996, und beim männlichen Halländer 1094 beträgt, erweist sich derselbe beim männlichen Büffel nur als 142 und beim weiblichen nur als 135. Die

TABELLE 8.

Verteilung der Haarzahl pro qcm Hautfläche in 8 verschiedenen Gesichtsfeldern, ihre Mittelwerte, Standardabweichungen und Spielräume bei einem formosanischen Stier.

Körperregion	Gefundene Zahl der Deckhaare pro qcm Hautfläche in 8 beliebigen Gesichtsfeldern								Mittelwert M	Standardabweichung σ	M \pm 2 σ	M \pm 2,5 σ
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII				
1. Regio frontalis	1100	1000	1100	1000	1100	900	1200	1100	1062,5	85,7	891,1~1233,9	
2. R. brachiocephal.	1200	1600	1600	1200	1400	1300	1400	1500	1400,0	150,0	1100,0~1700,0	
3. R. interscapul.	1000	1100	1100	1000	1100	1000	1100	900	1037,5	69,6	838,3~1176,7	
4. R. scapularis	1300	1200	1200	1300	1300	1200	1200	1200	1237,5	47,4	1142,7~1332,3	
5. R. dorsalis	1100	900	800	1000	1100	1000	1000	900	975,0	96,8	781,4~1168,6	
6. R. costalis	1300	1300	1000	1100	1200	1300	1200	1000	1175,0	119,9	935,2~1414,8	
7. R. epigastrica	1200	1100	1200	1300	1200	1300	1300	1200	1225,0	66,1	1092,7~1357,3	
8. R. umbilic. ant.	1600	1500	1300	1400	1500	1500	1600	1500	1487,5	92,7	1302,1~1672,9	
9. R. umbilic. post.	1300	1100	1300	1200	1100	1300	1200	1100	1200,0	85,6	1026,8~1373,2	
10. R. mammalis	800	800	600	600	700	600	500	600	650,0	100,0	450,0~850,0	
11. R. lumbalis	1200	1100	900	1000	900	1000	800	900	975,0	119,9	735,2~1214,8	
12. Fossa paralumb.	900	900	1100	1100	900	1000	900	800	950,0	84,8	780,4~1119,6	
13. R. glutaeta	900	900	900	900	900	800	900	800	875,0	43,3	788,4~961,6	
14. R. glutaeta post.	1000	1200	1000	1200	1200	1100	1200	1300	1150,0	100,0	950,0~1350,0	
15. R. axillaris	1400	1500	1400	1700	1500	1400	1500	1500	1487,5	92,7	1302,1~1672,9	1255,7~1719,3
16. R. antebrach. later.	1000	1100	1300	1000	1000	1300	1200	1100	1125,0	119,9	885,2~1364,8	
17. R. antebrach. med.	1500	1500	1500	1600	1500	1400	1600	1400	1500,0	70,7	1358,6~1641,4	
18. R. cruralis later.	1200	1500	1600	1500	1200	1300	1400	1500	1400,0	141,4	1117,2~1682,8	
19. R. cruralis med.	1400	1400	1200	1500	1500	1300	1400	1400	1387,5	92,7	1202,1~1572,9	1155,7~1619,3
20. R. metacarpea	1100	1000	1000	1100	1000	1100	1000	1000	1037,5	47,4	942,7~1132,3	
21. R. metatarsa	1000	1000	900	1100	1000	1000	1100	1000	1012,5	59,9	892,7~1132,3	

TABELLE 9.

Dichtigkeit der Behaarung; Haarzahl pro qcm Hautfläche nach Art,
Rasse, Geschlecht und Körperregion geordnet.

Körperregion	Büffel		Indische Zebus			Formosarind		Holländer	
			Sind		Kank rej				
	Stier	Kuh	Stier	Kuh	Stier	Stier	Kuh	Stier	Kuh- kalb
1. Regio frontalis	183	200	776	1851	1426	1063	2100	900	1738
2. R. brachiocephal.	131	120	1200	3056	2389	1400	2513	1060	2400
3. R. interscapul.	126	143	—	2278	1722	1038	2200	840	3300
4. R. scapularis	109	132	2109	2315	2403	1238	2938	1110	2813
5. R. dorsalis	114	126	1450	1600	1907	975	1450	870	1675
6. R. costalis	109	103	1800	1728	2204	1175	1825	1120	3100
7. R. epigastrica	143	103	2250	1167	2389	1225	2900	1450	2613
8. R. umbilic. ant.	100	120	1750	1550	2444	1488	1763	1030	2125
9. R. umbilic. post.	143	166	1775	2325	1500	1200	1338	1110	1900
10. R. mammalis	114	149	1115	1775	1148	650	1800	570	1300
11. R. lumbalis	114	103	1200	1205	1407	975	1475	1000	1650
12. Fossa paralumb.	131	115	1350	1630	2167	950	1700	990	2438
13. R. glutea	97	103	1025	1525	1463	875	1213	1280	1763
14. R. glutea post.	166	189	2475	1503	1519	1150	2075	1320	2125
15. R. axillaris	154	107	1900	944	2852	1488	2138	1360	2613
16. R. antebrach. later.	149	109	1625	2574	2407	1125	2263	1040	1850
17. R. antebrach. med.	154	150	1725	2825	2833	1500	2988	1510	2925
18. R. cruralis later.	150	114	1325	1725	2056	1400	2075	1350	2085
19. R. cruralis med.	154	132	1750	1759	2352	1388	2163	960	2913
20. R. metacarpea	213	180	1622	1705	2019	1038	1463	1290	988
21. R. metatarsea	223	166	1175	1250	1889	1013	1550	810	1600
Im Durchschnitt	142	135	1570	1823	2024	1160	1996	1094	2186

Behaarung beim Büffel ist also ungefähr 10 bzw. 8 mal dünner als bei Zebus und Hausrindern. Unter den letzteren ist der Rassenunterschied in der Haardichtigkeit, wenn auch in geringerem Masse, nachzuweisen; der Sind- und Kankrej-Zebu sind dichter behaart als das Formosarind und der Holländer; das Verhältnis zwischen dem Sind-Zebu und dem Holländer beträgt etwa 1,5:1 und dasselbe zwischen dem Kankrej und dem Holländer 2:1. Der geschlechtliche Unterschied scheint auch beim Zebu und Hausrind mehr oder weniger vorhanden zu sein; das weibliche Geschlecht ist meistens dichter behaart als das männliche. Die ausserordentliche Dichtigkeit der Behaarung beim holländischen Kuhkalb (*Taf. XI, Abb. 2*) ist allerdings vielmehr dem jungen Alter zurückzuführen, worüber wir noch später besprechen werden (S. 126).

Unter den verschiedenen Körperteilen stellt bei Zebus und Hausrindern die Hals- und Schultergegend und bei Büffel die Stirngegend die am dichtesten behaarten Hautstellen dar. Danach folgen die Extremitäten bei allen Fällen. Am ärmsten sind die Haare am Euter bei Zebus und Hausrindern und am Hinterbacken bei Büffel zu finden. Die übrigen Körperteile lassen sich ihre Reihenfolge in der Behaarung nicht leicht bestimmen.

Da, wie später beschrieben, die Hautdrüsen wie Talg- und Schweissdrüse immer als integrierende Bestandteile des Deckhaares auftreten, so steht die Behaarung mit der Verteilung der Hautdrüsen in engster Beziehung.

Obwohl die Haardickenmessung im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht liegt, sei es hier einiges über die Haarwurzelstärke beim Büffel im Zusammenhang mit der Behaarung kurz erwähnt, denn das Haarkleid bei diesem Tier, abweichend von anderen Rindergeschlechtern, besteht aus zwei deutlich voneinander unterscheidbaren Haararten.

Wie man am lebenden Tier leicht sieht, bestehen die Deckhaare beim Büffel aus einer grösseren Menge des kurzen feinen Grannenhaaren und einer kleineren Menge der langen groben Grannenhaaren. Im Flächenschnitt der Haut verschiedener Körperteilen tritt dieses

Verhalten noch deutlicher vor (*Taf. X, Abb. 2*). Gemessen am Querschnitt durch die Haarwurzeln in der Höhe zwischen der Talgdrüsen- und Balgmündung, schwankte die Dicke der feineren Grannenhaare zwischen $13\text{--}90\ \mu$ im männlichen und $13\text{--}60\ \mu$ im weiblichen Geschlecht und im Durchschnitt betrug sie $34,4\ \mu$ im männlichen und $24,7\ \mu$ im weiblichen Geschlecht. Die Wurzeldicke der größeren

TABELLE 10.

Mengenverhältnisse zwischen den feineren und den größeren Grannenhaaren an verschiedenen Körperregionen bei einem männlichen Büffel.

Körperregion	Prozentsatz der feineren Grannenhaare vom ganzen Haarbestand (300 Haare)
1. Regio frontalis	66
2. R. brachiocephal.	92
3. R. interscapul.	94
4. R. scapularis	83
5. R. dorsalis	91
6. R. costalis	86
7. R. epigastrica	90
8. R. umbilic. ant.	91
9. R. umbilic. post.	90
10. R. mammalis	83
11. R. lumbalis	91
12. Fossa paralumb.	90
13. R. glutaes	90
14. R. glutaes post.	85
15. R. axillaris	85
16. R. antebrach. later.	75
17. R. antebrach. med.	82
18. R. cruralis later.	81
19. R. cruralis med.	82
20. R. metacarpea	63
21. R. metatarsea	69
Im Durchschnitt	84

Grannenhaare schwankte zwischen $90\text{--}240\ \mu$ durchschnittlich $145\ \mu$ im männlichen, und $60\text{--}160\ \mu$ durchschnittlich $96,8\ \mu$ im weiblichen Geschlecht.

Das Mengenverhältnis zwischen den feineren und den größeren Grannenhaaren variiert auch je nach der Körperregion (Tabelle 10). Die feineren Grannenhaare treten allerdings stets in den Vordergrund; sie betrugen etwa 66–94%, im Durchschnitt 84% vom ganzen Haarbestand. In relativ geringerem Masse traten sie an Stirn und Extremitäten auf. Es ergibt sich daher in Verbindung mit dem obigen Befund über die Haardichtigkeit, dass beim Büffel die Stirn und die Extremitäten mit den groben Haaren am dichtesten bedeckt sind.

5. Haarwurzellänge

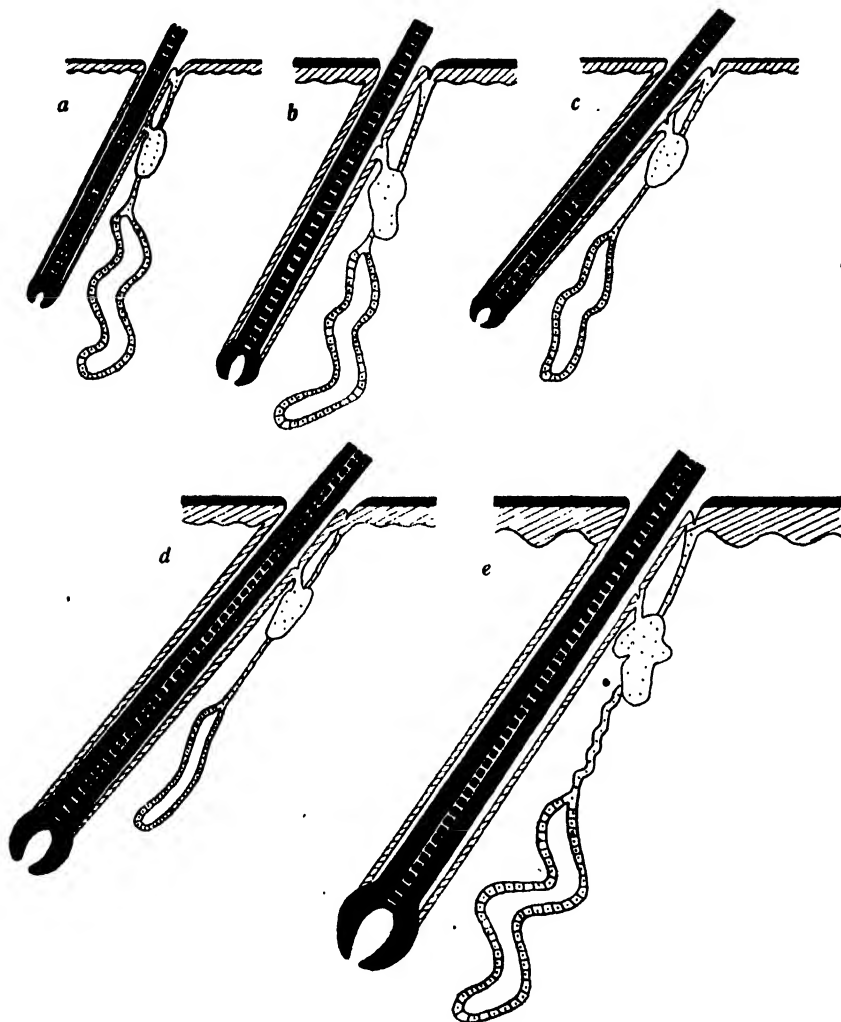
Die Haarwurzellänge, gemessen das Haar entlang von der Haarzwiebel bis zur Hautoberfläche, geht gewissermassen mit der Haarstärke Hand in Hand; die stärkeren Haare besitzen eine längere Haarwurzel und umgekehrt. Dieses Verhalten kommt bei den Büffelhaaren besonders zum Ausdruck. Bei den gröberen Grannenhaaren dieses Tieres schwankt nämlich die Haarwurzellänge zwischen 1500–4140 μ , während dieselbe bei den feineren Grannenhaaren innerhalb 900–1500 μ liegt. Wenn man die Variationsbreite der Haarwurzellänge bei den männlichen Tieren vergleicht, ist die Haarwurzel beim Büffel am längsten, dann folgen der Reihe nach Holländer, Sind und Formosarind; sie ist beim Kankrej am kürzesten:

	Variationsbreite der Haarwurzellänge in μ
Büffel	980 -- 4140
Sind-Zebu	800 — 2300
Kankrej-Zebu	700 — 1470
Formosarind	1030 — 1820
Holländer	1200 — 3300

6. Talgdrüse

Bei allen hier in Betracht kommenden Rindergeschlechtern treten die Talgdrüsen, *Glandulae sebaceae*, stets als Anhangsorgane der Haarbälge auf. Die Talgdrüsen liegen in der Regel in der Papillarschicht. An den Achsel- und Bauchgegenden, wo sie besser ausgebildet sind, erstrecken sie sich jedoch noch tiefer sogar auf den oberen Teil der Retikularschicht. An derselben Hautstelle geht die Lage der Talgdrüsen auch mit der Länge der Haarwurzel Hand in Hand; je länger die Haarwurzel ist, desto tiefer liegen die Drüsen in der Haut. Die Talgdrüsen bestehen aus dem Ausführungsgang und Drüsenkörper. Der Ausführungsgang ist sehr kurz und wird durch die von der äusseren Wurzelscheide her sich fortsetzende Epidermis d. h. vom mehrschichtigen Plattenepithel ausgekleidet; er mündet unter der trichterförmigen Balgöffnung in den Haarbalg ein. Der Drüsenkörper ist von halbkugelig oder birnförmiger Gestalt mit oder ohne alveoläre Ausbuchtungen. Während nun die Talgdrüsen

bei Zebus und Hausrindern eine einfache oder verästelte alveoläre Einzelform zeigen, bilden sie beim Büffel zusammengesetzte Alveoli (Textabb. 2).



Textabb. 2.

Schematische Darstellungen der senkrechten Schnitte durch die Haut bei verschiedenen Rinderarten, um die Form- und Grössenverhältnisse der Hautschichten und Hautorgane zu demonstrieren. Alle Schemata wurden auf Grund der durch Messungen erhaltenen Durchschnittswerte hergestellt. *a.* Kankrej-Zebu. *b.* Sind-Zebu. *c.* Formosarind. *d.* Friesisch-Holländer. *e.* Büffel.

In der Tätigkeit der Drüsenzellen sind auch erhebliche Unterschiede zwischen dem Büffel und den anderen Rindergeschlechtern

vorhanden. Bei Zebus und Hausrindern sind die Kerne der sekretfüllenden Zellen mitten im Drüsenkörper entweder durch Karyolyse oder durch Karyorrhesis verschwunden und das Zytoplasma befindet sich in der hochgradigen Fettdegeneration. Beim Büffel, dagegen, bleiben die Kerne noch erhalten, wenn sie auch pyknotisch sind und die Verfettung des zytoplasmatischen Teils nur in geringerem Masse zutagetritt. Das Sekret der Talgdrüsen des Büffels erscheint daher kernhaltig und weniger fettig zu sein.

Was die quantitative Entwicklung der Talgdrüsen anlangt, so sind der Umfang des Drüsenindividuums und die Zahl der Drüsen in Betracht zu ziehen. Der Umfang der Drüse wurde an der grössten Breite, der dazu senkrecht gestellte Breite und der Tiefe des mutmasslich grössten Drüsenindividuums für jede Körperteile durch serienweise Verfolgung der Flächenschnitte bestimmt. Die gefundenen Zahlen sind auf Tabelle 11 zusammengestellt.

Aus diesen Ergebnissen geht hervor, dass der Umfang der Talgdrüsenindividuen beim Büffel am grössten ist, was anscheinend mit der Haarstärke bzw. dem Umfang des Haarbalgs Hand in Hand geht. Unter den anderen Rindergeschlechtern hat der Zebu durchschnittlich die grösste Talgdrüse, es folgen dann das Formosarind und der Kankrej-Zebu. Sehr auffallend ist, dass der Holländer die kleinsten Dimensionen am Drüsenumfang zeigt. An demselben Individuum bei allen Tierexemplaren sind der Umfang der Talgdrüsen an der Bauch- und Brustgegend sehr gross. Weniger umfangreich sind dieselbe am Hals und Kopf. Im allgemeinen kann man sagen, dass die Talgdrüsen auf den weniger dicht behaarten Hautstellen den grösseren Umfang besitzen als diejenige auf den dichter behaarten Partien, wo die Drüsen mehr nach die Tiefe gezogen sind.

Die Verteilung der Talgdrüsen auf Körperfläche schwankt selbstverständlich einerseits mit der Dichtigkeit der Deckhaare andererseits mit der Zahl der in einem Haarbalg einmündenden Drüsenindividuen. Bei Büffel und Kankrej-Zebu treten in allen Körperteilen stets zwei benachbarte Talgdrüsen für je einen Haarbalg auf. Bei den anderen Rinderrassen sind die Haarbälge in den bestimmten Körperteilen wie Brust, Unterbauch und Extremitäten von mehr als zwei meistens drei bis fünf Talgdrüsen rosettenartig umlagert.

TABELLE 11.

Volumina der Talgdrüsen nach Art, Rasse, Geschlecht und Körperregion geordnet. Es wurde eine Drüse für je eine Körperregion gemessen, die beim Durchmustern der Schnittpräparate mutmasslich als die grösste zu betrachten war. In jeder Kolonne stellt die erste Zahl die grösste Breite, die zweite Zahl den dazu senkrecht gestellte Breite und die dritte Zahl die Tiefe des Drüsenkörpers in μ dar.

Körperregion	Büffel		Indische Zebu				Formosarind		Holländer	
			Sind		Kankrej					
	Stier	Kuh	Stier	Kuh	Stier	Kuh	Stier	Kuh	Stier	Kuhkalb
1. Regio frontalis	320 × 100 × 70	400 × 120 × 120	400 × 170 × 100	220 × 100 × 200	320 × 120 × 320	150 × 100 × 160	200 × 100 × 200	150 × 100 × 160	120 × 60 × 100	220 × 60 × 200
2. R. brachiocephal.	300 × 110 × 50	340 × 135 × 300	240 × 100 × 100	120 × 50 × 60	110 × 60 × 110	200 × 80 × 140	180 × 85 × 110	200 × 80 × 140	120 × 30 × 100	110 × 72 × 200
3. R. interscapul.	150 × 70 × 50	340 × 105 × 320	—	300 × 120 × 100	125 × 90 × 150	160 × 100 × 160	200 × 110 × 220	160 × 100 × 160	200 × 100 × 160	152 × 70 × 220
4. R. scapularis	120 × 100 × 50	420 × 150 × 400	220 × 110 × 300	220 × 90 × 120	165 × 100 × 110	220 × 60 × 120	220 × 60 × 120	220 × 90 × 110	120 × 65 × 110	170 × 70 × 150
5. R. dorsalis	160 × 225 × 150	510 × 220 × 420	420 × 110 × 260	110 × 100 × 100	210 × 95 × 215	220 × 85 × 170	220 × 85 × 170	110 × 90 × 120	300 × 120 × 420	170 × 70 × 140
6. R. costalis	150 × 110 × 350	440 × 210 × 400	300 × 130 × 260	220 × 90 × 120	220 × 100 × 150	200 × 70 × 200	200 × 100 × 150	200 × 70 × 200	120 × 30 × 110	100 × 75 × 160
7. R. epigastrica	500 × 200 × 50	500 × 250 × 440	320 × 100 × 300	210 × 100 × 220	200 × 95 × 110	160 × 70 × 200	130 × 150 × 240	160 × 70 × 200	200 × 110 × 220	150 × 70 × 250
8. R. umbilic. ant.	400 × 220 × 50	470 × 250 × 530	260 × 150 × 300	210 × 110 × 300	210 × 120 × 220	160 × 95 × 160	300 × 110 × 220	160 × 95 × 160	110 × 100 × 300	200 × 60 × 160
9. R. umbilic. post.	150 × 220 × 50	400 × 200 × 450	400 × 100 × 350	240 × 80 × 300	220 × 100 × 200	250 × 110 × 160	300 × 135 × 220	250 × 110 × 160	100 × 120 × 110	200 × 60 × 155
10. R. mammalis	620 × 310 × 650	500 × 210 × 450	300 × 110 × 220	140 × 70 × 160	220 × 110 × 170	120 × 120 × 180	300 × 120 × 110	120 × 120 × 180	240 × 150 × 300	165 × 65 × 220
11. R. lumbalis	400 × 230 × 250	270 × 125 × 100	300 × 110 × 210	240 × 110 × 110	210 × 120 × 160	160 × 90 × 130	300 × 130 × 110	160 × 90 × 130	100 × 100 × 220	200 × 85 × 150
12. Fossa paralumb.	420 × 130 × 320	340 × 110 × 410	300 × 120 × 110	220 × 100 × 150	230 × 110 × 160	160 × 105 × 140	220 × 120 × 120	160 × 105 × 140	200 × 100 × 110	184 × 64 × 120
13. R. gluteae	120 × 90 × 100	400 × 120 × 100	340 × 150 × 110	110 × 95 × 120	240 × 140 × 200	230 × 70 × 120	200 × 110 × 200	200 × 110 × 200	200 × 140 × 200	150 × 85 × 200
14. R. gluteae post.	240 × 120 × 200	400 × 100 × 300	220 × 100 × 210	160 × 95 × 110	200 × 90 × 150	220 × 100 × 110	200 × 100 × 130	200 × 100 × 130	160 × 100 × 110	150 × 80 × 140
15. R. axillaris	400 × 200 × 130	600 × 350 × 630	220 × 95 × 100	250 × 85 × 220	170 × 110 × 250	220 × 95 × 200	220 × 95 × 200	200 × 100 × 220	200 × 30 × 220	210 × 60 × 200
16. R. antebrach. later.	180 × 200 × 670	420 × 180 × 380	360 × 140 × 100	200 × 70 × 160	200 × 105 × 190	270 × 110 × 220	270 × 110 × 220	160 × 90 × 120	110 × 90 × 220	100 × 65 × 140
17. R. antebrach. med.	330 × 150 × 120	220 × 120 × 110	210 × 110 × 220	110 × 50 × 110	160 × 95 × 130	300 × 70 × 110	300 × 70 × 110	150 × 60 × 120	200 × 45 × 110	190 × 65 × 120
18. R. cruralis later.	400 × 180 × 100	400 × 210 × 100	340 × 130 × 210	110 × 90 × 110	160 × 90 × 220	200 × 60 × 160	200 × 60 × 160	200 × 85 × 200	210 × 60 × 180	160 × 76 × 180
19. R. cruralis med.	320 × 150 × 250	400 × 200 × 400	200 × 90 × 210	200 × 60 × 110	110 × 85 × 200	200 × 60 × 120	200 × 60 × 120	200 × 100 × 120	120 × 70 × 300	150 × 60 × 140
20. R. metacarpea	280 × 140 × 350	370 × 200 × 350	220 × 100 × 260	160 × 100 × 110	260 × 120 × 300	300 × 170 × 110	300 × 170 × 110	220 × 120 × 150	220 × 130 × 300	200 × 80 × 210
21. R. metatarsa	400 × 120 × 300	310 × 140 × 310	210 × 100 × 160	210 × 100 × 220	160 × 100 × 160	250 × 150 × 320	250 × 150 × 320	180 × 95 × 140	210 × 130 × 440	210 × 75 × 150
Im Durchschnitt	410 × 181 × 131	401 × 162 × 409	295 × 125 × 215	210 × 92 × 180	210 × 101 × 197	230 × 103 × 207	230 × 103 × 207	164 × 91 × 161	199 × 97 × 231	174 × 72 × 162

TABELLE 12.

Zahl der Talgdrüsen pro qcm Hautfläche nach Art, Rasse, Geschlecht und Körperregion geordnet.

Körperregion	Büffel		Indische Zebus			Formosarind		Holländer	
	Stier	Kuh	Sind		Kank-rej	Stier	Kuh	Stier	Kuh-kalb
			Stier	Kuh	Stier				
1. Regio frontalis	366	400	1607	3702	2852	2339	4200	1900	3476
2. R. brachiocephal.	262	240	2400	6112	4778	2800	5026	2120	4800
3. R. interscapul.	152	286	—	4556	3444	2610	4400	1785	6600
4. R. scapularis	218	264	4218	4630	4806	2128	5876	2220	5626
5. R. dorsalis	228	252	2995	3220	3814	2011	2900	1870	3350
6. R. costalis	218	206	3780	3456	4408	2428	3650	2240	6200
7. R. epigastrica	286	206	4500	2334	4778	2695	5800	3080	5226
8. R. umbilic. ant.	200	240	3500	3100	4888	2950	3526	2200	4250
9. R. umbilic. post.	286	332	3550	4650	3000	2400	2810	2220	3800
10. R. mammalis	228	298	2453	3550	2296	1300	3600	1210	2600
11. R. lumbalis	228	206	2520	2410	2814	2015	2850	2000	3410
12. Fossa paralumb.	262	230	2700	3260	4334	1900	3400	2030	4998
13. R. glutaeta	194	206	2050	3050	2926	1808	2426	2560	3526
14. R. glutaeta post.	332	378	4950	3006	3038	2300	4150	2640	4250
15. R. axillaris	308	214	3800	2045	5704	3162	4276	2720	5226
16. R. antebrach. later.	298	218	3250	5158	4814	2391	4526	2196	3700
17. R. antebrach. med.	308	300	3450	5933	5666	3000	5976	3020	5850
18. R. cruralis later.	300	228	2650	3450	4112	2800	4140	2830	4300
19. R. cruralis med.	308	264	3500	3518	4704	2776	4326	2020	5826
20. R. metacarpea	426	360	3406	3410	4038	2126	2933	2580	2076
21. R. metatarsea	446	332	2350	2500	3778	2076	3100	1880	3400

Nach den Bestimmungen der Zahl der Drüsenindividuen pro qcm Hautfläche, die an den Flächenschnitten des Hautstückchens aus verschiedenen Körperregionen mittels Netzkulars ausgeführt wurden, erwies sich, dass der Büffel an Talgdrüsen am ärmsten und der Kankrej-Zebu am reichlichsten ist. Während nun die Zahl der Talgdrüsen pro qcm Hautfläche beim männlichen Kankrej durchschnittlich 4047 beläuft, beträgt dieselbe beim männlichen Büffel nur 279 d. h. etwa 7% des Kankrej-Zebus. Zwischen diesen beiden Tierarten liegt der Reihe nach der Sind-Zebu, das Formosarind und der Holländer; die Drüsenzahl pro qcm Hautfläche beträgt bei diesen Tieren resp. 3181, 2383 und 2253 (Tabelle 12).

Sehr bemerkenswert ist, dass sowohl beim Büffel als auch bei anderen Rindergeschlechtern, sei es männlich, sei es weiblich, die Bauch- und Hinterbackengegend die drüsenreichsten Haut besitzen. Der Geschlechtsunterschied in der Zahl der Talgdrüsen ist beim Sind-Zebu und Formosarind bedeutend; diese sind im weiblichen Geschlecht immer zahlreicher als im männlichen. In dieser Hinsicht sehen wir beim Holländer den grössten Unterschied, was hierbei wieder das Alter eine massgebende Rolle zu spielen scheint.

7. Schweissdrüse

Die Schweissdrüse, *Glandulae sudoriparae*, kommt sowohl beim Büffel als auch beim Zebu und Hausrind ausnahmslos als Anhang eines Haares vor, indem sie stets auf der nach abwärts sehenden Seite der Haarwurzel liegt. Sie ist unverästelte tubulöse Einzeldrüse, welche aus einem Ausführungsgang und einem Drüsenkörper besteht.

Der Ausführungsgang, der vom Drüsenkörper scharf begrenzt ist, steigt gerade oder schlänglig am Haarbalg entlang nach aufwärts; nur beim Büffel ist er in der Nähe des Drüsenkörpers mehr oder weniger spiralig gewunden (*Taf. IX, Abb. 1*). Er läuft immer zwischen die Lappchen der beiden benachbarten Talgdrüsen hindurch (*Textabb. 2*) und mündet trichterförmig entweder in einen Haarbalg dicht an der Oberfläche oder frei neben der Balgmündung direkt an die Haut-

fläche. Die Wandung des Ausführungsganges wird auf der meisten Strecke von zweischichtigem kubischem oder plattenförmigem Epithel ausgekleidet, im Bereiche der Epidermis und des Papillarkörpers jedoch von mehrschichtigem Plattenepithel. Abgesehen von der trichterförmigen Einmündungsstellen, bleibt das Lumen nahezu gleich weit.

Der Drüsenkörper ist ein mehr oder weniger gewundener Schlauch mit Erweiterung eines blinden Endes; sehr oft kommt er auch nur als ein ovales Säckchen. Eigentliche Knäuelbildung liess sich bei keinem Tierexemplar nachweisen.

Die Schweissdrüsen liegen im Korium stets tiefer als die Talgdrüsen; sie reichen jedoch keinesfalls in die Tiefe der Subcutis. In der Regel geht der Drüsenkörper in der Höhe der Haarpapille in den eigenen Ausführungsgang hinüber. Infolgedessen schwankt die Lage der Schweissdrüsen nach der Hautdicke bzw. Haarwurzellänge. Somit finden sie sich beim Büffel am tiefsten im Korium, dann folgen der Reihe nach Holländer, Sind und Formosarind; sie sind bei Kankrej am obersten zu finden (*Textabb. 2*). Für die geschlechtsbedingten Unterschiede sowie für die Unterschiede nach verschiedenen Körperteilen in der Lage der Schweissdrüsen sind auch die Befunde über die Hautdicke und Haarwurzellänge vollkommen gültig, wenn wir auf dem Standpunkt stehen, dass zwischen diesen drei Massen eine Korrelation vorhanden ist.

Die quantitative Entwicklung der Schweissdrüsen ist erstens am Umfang des Drüsenkörpers, zweitens an seinen Windungen, drittens an der Verteilung der Drüsen auf Körperfläche festzustellen. Der Umfang des Drüsenkörpers wurde an Tiefe und Breite¹⁾ des erweiterten Schlauches beim mutmasslich grössten Drüsenindividuum durch serienweise Verfolgung der Vertikalschnitte für jede Körperteile bestimmt (Tabelle 13).

Wenn man die Durchschnittswerte der männlichen Tiere vergleicht, ergibt es sich, dass die Schweissdrüse beim Büffel und Zebu in ihrem Breiten- und Tiefenmass grösser ist als bei formosanischem

1) Das Breitemass der Schweissdrüse, abweichend von der Talgdrüse, ist in jeder Richtung beinahe gleich, so dass es nur eine Dimension dafür genügt.

und holländischem Rind. Die grössten Schweissdrüsen finden wir nämlich beim Büffel; es folgen Sind- und Kankrej-Zebu, Formosarind und Holländer. Es besteht zwischen dem Holländer und dem Büffel oder dem Sind-Zebu ein wesentlicher Unterschied (*Textabb. 2*). Im Durchschnitt beträgt die Schweissdrüse des Holländers im Vergleich mit derjenigen des Büffels und des Sind-Zebus in ihrer Breite etwa 35 resp. 48% und in ihrer Tiefe etwa 64 resp. 79%. Der geschlechtliche Unterschied ist schwer zu bestimmen. Während die Schweissdrüse beim Büffel und Formosarind im männlichen grösser erscheint als im weiblichen Geschlecht, ist das Verhalten beim Sind-Zebu gerade umgekehrt. Bezüglich der Schwankung nach den Körperregionen zeigt die Schweissdrüse bei allen Fällen an der Achsel-, Stirn- und Bauchgegend den grössten Umfang, dann folgen die Brust- und Gesässgegend, und Extremitäten nach der Reihe; der Hals kommt zuletzt.

Die Windungszahlen der Schweissdrüsenindividuen, die an den senkrechten Schnittserien der Hautstücke bestimmt wurden, sind in Tabelle 14 angegeben. Danach kann die Schweissdrüse bei Rinderarten höchstens 5 bis 6 seltens 7 mal gewunden werden; es kommt die Drüse ohne Windung vor, was besonders beim Holländer am öftesten zu finden ist. Im allgemeinen ist die Windung des Drüsenkörpers beim Büffel und Zebu stärker als beim Holländer, während das Formosarind beinahe eine Zwischenstellung einnimmt. In allen Fällen ist der Drüsenkörper beim Stier stärker gewunden als bei der Kuh. Bezüglich der Unterschiede nach Körperteilen zeigen bei allen Tierexemplaren die Achsel- und Eutergegend die stärkste und die Schulter und Extremitäten die schwächste Windung des Drüsenkörpers.

TABELLE 13.

Umfang der Schweissdrüse nach Art, Rasse, Geschlecht und Körperregion geordnet. Es wurde eine Drüse für je eine Körperregion gemessen, die beim Durchmusteren der Schnittpräparate mutmasslich als die grösste zu betrachten war.

In jeder Kolonne stellt die erste Zahl das Breitenmass und die zweite das Tiefenmass dar.

Körperregion	Büffel		Indische Zebus				Formosarind		Holländer	
			Sind		Kankrej					
	Stier	Kuh	Stier	Kuh	Stier	Kuh	Stier	Kuh	Stier	Kuhkalb
1. Regio frontalis	280 × 1000	390 × 620	400 × 1300	480 × 1000	340 × 800	210 × 560	160 × 520	210 × 560	200 × 700	160 × 580
2. R. brachiocephal.	260 × 1050	250 × 700	150 × 400	280 × 1020	200 × 500	100 × 450	150 × 640	100 × 450	120 × 400	130 × 410
3. R. interscapul.	360 × 640	260 × 750	---	500 × 800	250 × 500	200 × 625	200 × 620	200 × 625	65 × 520	130 × 480
4. R. scapularis	300 × 1240	300 × 600	300 × 880	260 × 815	240 × 620	140 × 400	200 × 620	140 × 400	80 × 440	180 × 540
5. R. dorsalis	600 × 1100	350 × 700	400 × 600	400 × 1300	250 × 400	180 × 440	200 × 600	180 × 440	140 × 740	160 × 540
6. R. costalis	380 × 560	230 × 640	250 × 520	150 × 600	300 × 500	170 × 420	220 × 480	170 × 420	140 × 400	170 × 540
7. R. epigastrica	500 × 1260	240 × 520	200 × 720	190 × 600	380 × 1025	150 × 560	220 × 620	150 × 560	85 × 680	170 × 480
8. R. umbilic. ant.	400 × 850	160 × 400	260 × 650	520 × 1200	250 × 880	180 × 780	220 × 500	180 × 780	150 × 500	140 × 440
9. R. umbilic. post.	320 × 1340	260 × 600	300 × 840	300 × 920	300 × 800	180 × 700	230 × 500	180 × 700	60 × 400	240 × 480
10. R. mammalis	600 × 800	290 × 500	350 × 1100	330 × 900	320 × 900	240 × 620	210 × 500	240 × 620	250 × 700	410 × 1500
11. R. lumbalis	390 × 580	300 × 500	220 × 700	320 × 800	300 × 600	190 × 580	220 × 540	190 × 580	100 × 700	180 × 780
12. Fossa paralumb.	380 × 750	300 × 400	200 × 500	300 × 760	210 × 500	170 × 440	220 × 620	170 × 440	60 × 450	160 × 500
13. R. glutea	620 × 1200	200 × 650	240 × 300	250 × 850	260 × 500	180 × 520	240 × 760	180 × 520	160 × 740	140 × 500
14. R. glutea post.	410 × 710	240 × 900	240 × 560	280 × 800	230 × 400	170 × 710	210 × 440	170 × 710	160 × 460	180 × 540
15. R. axillaris	580 × 1350	350 × 1200	500 × 880	400 × 1600	300 × 890	140 × 690	230 × 700	140 × 690	240 × 800	280 × 610
16. R. antebrach. later.	540 × 1080	150 × 560	340 × 840	220 × 800	220 × 780	190 × 620	260 × 660	190 × 620	100 × 420	320 × 720
17. R. antebrach. med.	250 × 500	260 × 580	400 × 920	320 × 845	320 × 650	110 × 560	250 × 700	110 × 560	100 × 400	150 × 540
18. R. cruralis later.	400 × 650	220 × 310	120 × 500	240 × 740	300 × 660	260 × 530	240 × 650	260 × 530	165 × 420	150 × 500
19. R. cruralis med.	250 × 460	200 × 540	410 × 700	360 × 890	360 × 600	140 × 600	240 × 600	140 × 600	200 × 700	200 × 600
20. R. metacarpea	320 × 710	45 × 200	240 × 720	240 × 700	340 × 500	120 × 430	240 × 620	120 × 430	120 × 500	220 × 640
21. R. metatarsa	250 × 600	100 × 350	250 × 700	270 × 920	360 × 600	100 × 360	200 × 720	100 × 360	250 × 760	170 × 560
Im Durchschnitt	399 × 878	243 × 582	288 × 712	317 × 896	286 × 648	169 × 555	217 × 600	169 × 555	140 × 563	192 × 594

TABELLE 14.

Zahl der Windungen des Schweissdrüsenkörpers nach Art, Rasse,
Geschlecht und Körperregion geordnet.

Körperregion	Büffel		Indische Zebus			Formosarind		Holländer	
			Sind		Kan- krej				
	Stier	Kuh	Stier	Kuh	Stier	Stier	Kuh	Stier	Kuh- kalb
1. Regio frontalis	2~4	3~4	4~6	0~2	4~5	3~5	3~4	1~3	1~3
2. R. brachiocephal.	4~6	2~3	2~3	2~3	2~3	3~4	0~2	0~1	0~3
3. R. interscapul.	2~4	3~5	—	3~5	1~3	3~5	2~3	0~2	0~1
4. R. scapularis'	2~4	2~3	1~2	2~3	2~3	2~3	1~2	0~1	0~1
5. R. dorsalis	3~5	2~4	2~3	3~6	2~3	2~3	1~2	2~3	0~2
6. R. costalis	2~3	2~3	2~3	2~3	1~3	2~4	0~2	0~1	1~2
7. R. epigastrica	3~5	1~3	2~4	1~3	3~4	3~5	0~2	0~2	2~4
8. R. umbilic. ant.	2~4	1~3	2~4	2~4	3~5	2~3	2~4	1~3	1~3
9. R. umbilic. post.	2~4	2~3	2~3	2~3	3~5	2~3	2~3	0~1	2~4
10. R. mammalis	4~6	1~3	4~7	2~4	4~6	3~5	2~4	3~4	5~9
11. R. lumbalis	2~4	2~3	2~3	2~4	1~3	3~5	1~2	0~1	1~2
12. Fossa paralumb.	3~4	2~4	2~4	2~3	2~4	2~3	0~1	0~1	2~3
13. R. glutaeta	3~5	2~3	0~2	2~3	2~4	2~3	7~2	1~2	0~2
14. K. glutaeta post.	2~4	3~4	1~3	2~4	2~4	2~3	0~2	0~1	1~2
15. R. axillaris	3~7	3~5	3~6	4~7	4~6	3~5	2~3	2~5	3~4
16. R. antebrach. later.	2~4	2~3	3~5	1~3	0~3	1~3	1~2	0~2	1~3
17. R. antebrach. med.	1~3	1~3	3~5	0~2	2~3	3~4	0~2	0~1	1~2
18. R. cruralis later.	2~4	1~3	2~3	2~3	2~3	2~3	2~3	1~2	1~2
19. R. cruralis med.	1~3	1~3	2~4	4~5	3~5	2~3	2~3	2~4	1~3
20. R. metacarpea	2~4	0~1	3~6	0~3	2~3	3~4	0~1	0~1	3~4
21. R. metatarsa	2~4	1~3	3~4	3~4	2~3	2~4	0~2	1~4	1~3
Im Durchschnitt	2~4	2~3	2~4	2~4	2~4	2~4	1~2	1~2	1~3

Was die Verteilung der Schweissdrüsen auf die Körperfläche anbetrifft, so stimmt sie mit der Dichtigkeit der Behaarung vollständig überein, weil je eine Schweissdrüse zu einem Haar angehört (*Taf. X u. XI*). Die Zahl der Schweissdrüsen, die auf den Quadratcentimeter Hautfläche kommen, schwankt daher, ganz übereinstimmend mit der Haarzahl, nach Art, Rasse, Geschlecht und noch nach den Körperteilen. Hervorzuheben ist hierbei, dass die Zahl der Schweissdrüsen pro qcm Hautfläche beim Büffel in Übereinstimmung mit der Haarzahl ungefähr 10 bzw. 8 mal geringer ist als beim Zebu und Hausrind, bei denen dieselbe etwa 1000-2000 beträgt. Weiteres darüber verweisen wir auf die Artikel: Dichtigkeit der Behaarung.

Ausser den oben erwähnten quantitativen Unterschieden in der Entwicklung der Schweissdrüsen sind noch die morphologisch nachweisbaren auffallenden Unterschiede in den Sekretionsvorgängen zwischen dem Büffel und den anderen Rindergeschlechtern vorhanden, wenn auch zwischen Zebu und Hausrind kein wesentlicher Unterschied zu erkennen ist. Beim Büffel besteht nämlich das Drüsenepithel aus mehr zylindrischen Zellen, bei Zebus und Rindern dagegen aus niedrigen, nahezu plattenförmigen Zellen. Die kubischen bis zylindrischen Epithelien der Schweissdrüsen des Büffels enthalten häufig zahlreiche, feine oder grobe Pigmentkörner im Protoplasma. Ferner bei der Sekretion werden beim Büffel die Drüsenzellen selber zum Sekret; sie gehen bei der Absonderung zugrunde; es handelt sich hierbei um typische apokrine Drüse. So trifft man häufig im Drüsenlumen fettig und hydropisch degenerierte, abgestossene Epithelien mit oder ohne pyknotische Kerne (*Taf. XII, Abb. 2*). Bei anderen Rindergeschlechtern stellt die Schweissdrüse eine ekkrine Drüse dar, indem die wässrige Flüssigkeit aus den Drüsenzellen ohne Zelldegeneration ausgeschieden werden (*Taf. XII, Abb. 1*). Weiter ist die Entwicklung der drüseneigenen Muskulatur für die Drüsen-tätigkeit sehr massgebend. Beim Büffel ist die Muskelschicht häufig unterbrochen, d. h. nur auf einen Teil des Drüsenumfanges beschränkt, bei Zebus und Hausrindern tritt sie dagegen allorts als schöne regelmässige einschichtige Lage zutage.

8. Die Befunde bei den Föten

a) Büffelfötus Nr. 1. ♂

Nacken-Steiss-Länge 62,4 cm ; Brustumfang 59,9 cm ; Körpergewicht 20 kg.

Der ganze Körper war mit langen Grannenhaaren bedeckt, die Schwanzquaste schon gebildet; die Hautstellen an der Stirn, wo die Hörner wachsen sollten, waren haarlos, deutlich verdickt und ziemlich gehärtet; die Haut des ganzen Körpers stark pigmentiert. Dieser Fötus stellt also unter den uns zur Verfügung gestellten Fötus-exemplaren den ältesten dar und befand sich fast vor der Geburt. Die Hautstücke derselben Körperteile wie beim Erwachsenen wurden flach und senkrecht geschnitten. Die mikroskopische Untersuchung der Schnitte ergab folgendes: Die Epidermis zeigt in ihrer tiefsten Schicht eine einfache Lage sehr hoher Zylinderzellen, welche gegen das Korium zu durch eine feine Basalmembran abgegrenzt sind. Auf diesem Stratum cylindricum stehen eine oder zwei bis vier Reihen rundlicher oder polygonaler Zellen, die je nach den einzelnen Körperstellen schwanken können. Die freie Oberfläche wird entweder vom Epitrichium oder vom Stratum corneum bedeckt. Die Dicke der Bindegewebsfasern in der Papillarschicht beträgt $4,59 \pm 0,126$ d. h. ungefähr ein Drittel von denen beim Erwachsenen, und diejenige in der Retikularschicht $19,50 \pm 0,664$ d. h. ungefähr 1/1,5. Das Maschenwerk der Lederhaut beim Fötus ist etwas lockerer als beim Erwachsenen. Trotz dichter Behaarung ist der Papillarkörper noch nicht entwickelt. Die Dicke der Haut wechselt schon nach verschiedenen Körperregionen; so ist sie an der Stirngegend am dicksten, dann folgen der Reihe nach Hals, Achsel, Gesäss, Bauch, Extremitäten und Brust. Vergleicht man die Hautdicke dieses Fötus mit dem erwachsenen Büffel, so findet man in den Dickenverhältnissen der verschiedenen Hautstellen eine grosse Übereinstimmung zwischen den beiden. Ganz anders ist die Dichtigkeit der Körperbehaarung bzw. die Verteilung der Schweissdrüse. Alle Körperteile bei diesem Fötus sind nämlich viel dichter behaart als beim Erwachsenen. Die Zahl der Deckhaare pro qcm Hautfläche schwankt nämlich zwischen 675-1375, und beträgt durchschnittlich 990 (Tabelle 15). Hieraus folgt, dass der

betreffende Fötus etwa 7 mal dichter behaart ist als das erwachsene Tier (*Taf. X, Abb. 1 u. 2*). Dasselbe Verhältnis ist auch für die Verteilung der Schweissdrüsen gültig.

TABELLE 15.

Haarzahl pro qcm Hautfläche bei 3 Büffelföten und einem Formosarindsfötus.

Körperregion	Büffelfötus			Formosa- rindsfötus ♂
	Nr. 1 ♂	Nr. 2 ♀	Nr. 3 ♂	
1. Regio frontalis	1075	1312	2410	9925
2. R. brachiocephal.	950	2080	3516	16125
3. R. interscapul.	1200	2590	4571	14500
4. R. scapularis	875	1966	4100	12125
5. R. dorsalis	1225	2548	3712	11975
6. R. costalis	1025	2746	3850	12450
7. R. epigastrica	1125	2496	4432	14250
8. R. umbilic. ant.	1375	2090	3906	11500
9. R. umbilic. post.	1100	2392	—	11950
10. R. mammalis	1300	—	—	9550
11. R. lumbalis	1075	1695	2742	11675
12. Fossa paralumb.	1125	2746	4321	12750
13. R. glutaeta	1075	2298	3241	10475
14. R. glutaeta post.	900	2215	2715	9750
15. R. axillaris	775	2434	—	11800
16. R. antebrach. later.	657	1862	3352	9875
17. R. antebrach. med.	725	1799	—	10700
18. R. cruralis later.	775	1872	3463	10175
19. R. cruralis med.	850	1862	—	7225
20. R. metacarpea	775	1851	—	4175
21. R. metatarsea	800	2007	4044	5925
Im Durchschnitt	990	2143	3627	10899

Die Grösse der Talgdrüse ist kleiner als die Hälfte derjenigen beim Erwachsenen und schwankt nach den verschiedenen Körper-

teilen nicht so deutlich wie beim letzteren. Die Drüsenzellen sind im Innere der Alveoli dem fortschreitenden fettigen Zerfall unterworfen, den man wohl als Sekretion ansehen kann. Es scheint daher, dass die Talgdrüsen in den späteren Stadien des intrauterinen Lebens schon sekretionstätig sind.

b) Büffelfötus Nr. 2. ♀

Nacken-Steiss-Länge 38 cm; Brustumfang 39 cm; Körpergewicht 3,42 kg.

Dieser Fötus ist also beträchtlich jüngerer als der vorige. Die Deckhaare waren mit blossem Auge noch nicht zu erkennen, während die Wimperhaare und die Tasthaare an der Ober- und Unterlippe schon entwickelten. Die Schwanzquaste war auch noch nicht gebildet. Die Körperfläche war dunkel pigmentiert; die runden Hornstellen erschienen jedoch heller. Obwohl der Haarwuchs bei diesem Fötus noch nicht erfolgte, liess sich die Zahl der Deckhaare an den helleren punktförmigen Epidermisverdickungen ohne Schwierigkeit feststellen. Die Behaarung kam hierbei als beim vorigen Fötus viel dichter zum Vorschein. Die Haarzahl pro qcm Hautfläche lag je nach den Körperteilen zwischen 1312-2746, im Durchschnitt 2143 (Tabelle 15). Demnach ist die Behaarung bei diesem Fötus im Vergleich mit dem vorigen Büffelfötus etwa 2 mal und im Vergleich mit der erwachsenen Büffelkuh 16 mal dichter. Dementsprechend dichter ist die Verteilung der Schweissdrüsen.

c) Büffelfötus Nr. 3. ♂

Nacken-Steiss-Länge 29 cm; Brustumfang 30,5 cm; Körpergewicht 1,85 kg.

Dieser Büffelfötus vertritt den jüngsten unserer Fötusmateriale. Die Augen waren noch verschlossen. Die Deck- und Wimperhaare waren noch nicht gebildet, nur die Tasthaare um das Maul gewachsen. Die Hautfarbe war grau; die Hornanlage war nur durch hellere Färbung bemerkbar.

Die Haarzahl konnte bloss an den Haaranlagen bestimmt werden, die auf pigmentlosem Hautgrund als dunklere Punkte zum Ausdruck kamen. Die Haarzahl pro qcm Hautfläche schwankte innerhalb 2410-4571 und betrug durchschnittlich 3627 (Tabelle 15). Dieser Durch-

schnittswert ist im Vergleich mit demjenigen des Fötus Nr. 1, Nr. 2 und des Erwachsenen resp. etwa $3\frac{1}{2}$ mal, $1\frac{1}{2}$ mal und 26 mal grösser.

d) Formosarindsfötus ♂

Nacken-Steiss-Länge 60,7 cm; Brustumfang 55,5 cm; Körpergewicht 15,4 kg.

Die Länge der Deckhaare schwankte etwa innerhalb 2–10 cm; die Hautstelle, wo die Hörner wachsen sollten, waren dünner behaart und zeigten die leichten Verdickungen; vor dem Widerrist befand sich schon eine buckelartige Erhöhung der Rückenlinie. Die Haarzahl pro qcm Hautfläche, die an den Flächenschnitten der Hautstücke wie beim Erwachsenen bestimmt wurde, schwankt je nach der Körperregion zwischen 4175 und 16125 und betrug im Durchschnitt 10899 (Tabelle 15). Demnach ist der betreffende Fötus im Vergleich mit dem erwachsenen Formosastier ungefähr 9 mal dichter behaart.

Es wurde also bei einem weiblichen und zwei männlichen Büffelföten und einem männlichen Formosarindsfötus hauptsächlich die Haardichtigkeit in Betracht gezogen. Wenn wir nun diese Ergebnisse zusammenfassen und mit den Befunden an den erwachsenen Tieren vergleichen, so werden wir feststellen können:

1. Je früher der Fötus in den Entwicklungsstadien sich befindet, desto dichter ist die Zahl der Haare oder Haaranlagen pro qcm Hautfläche.

2. Das Verhältnis in der Zahl der Haarindividuen pro qcm Hautfläche zwischen dem erwachsenen männlichen Büffel und dem männlichen Büffelfötus, bei dem die Haaranlagen nur noch als dunkle Punkte auf der pigmentlosen Hautfläche auftraten, betrug etwa 1:26 (vgl. Büffelfötus Nr. 3) und dasselbe zwischen dem erwachsenen männlichen Büffel und dem gleichgeschlechtlichen, sich fast vor der Geburt befindlichen Büffelfötus betrug etwa 1:7 (vgl. Büffelfötus Nr. 1).

3. Das Verhältnis in der Haarzahl pro qcm Hautfläche zwischen dem erwachsenen männlichen Formosarind und dem gleichgeschlechtlichen, sich nahezu vor der Geburt befindlichen Formosarindsfötus betrug 1:9.

4. Aus obigen Befunden geht hervor, dass die Zahl der Haarindividuen pro qcm Hautfläche sowohl mit fortschreitenden Entwicklungsstadien im intrauterinen Leben als auch mit zunehmendem Alter im postnatalen Leben nach und nach verringert.

5. Diese Verringerung der Haardichtigkeit mit steigendem Alter ist offenbar der durch das Wachstum des Tieres verursachte Vergrößerung der Körper- bzw. Hautfläche zurückzuführen, weil die Degenerationerscheinung der einmal angelegten Haare weder im fötalen Leben noch im postnatalen Leben nachzuweisen sind.

6. Aus demselben Grunde erklärt sich z. T. die dichtere Behaarung im weiblichen Geschlecht als im männlichen, denn das weibliche Tier besitzt eine absolut kleinere Körperfläche als das männliche.

7. Die ausserordentlich dichte Behaarung beim oben beschriebenen, holländischen Kuhkalb (S. 109) ist ebenfalls dem jungen Alter bzw. der noch nicht ganz entfalteten Hautfläche zurückzuführen.

8. Da die Talg- und Schweissdrüse immer als Anhänge des Haares auftreten, müssen alle oben erwähnten Tatsachen, die für die Dichtigkeit der Behaarung volle Gültigkeit haben, folgerichtig auch für die Dichtigkeit der Hautdrüsen zutreffen.

IV. ZUSAMMENFASSUNG DER ERGEBNISSE NACH RINDERARTEN

Aus den vorhergehenden Messungsergebnissen ergab sich, dass die Häute der Rindergeschlechter in ihrer quantitativen Entwicklung nach der Körperregion die weitgehenden Differenzen zeigen, dazu noch der Geschlechts- und Alterseinfluss eine massgebende Rolle spielen. Wenn wir jedoch die Durchschnittswerte für jede Häutegattungen, die aus je 21 verschiedenen Körperregionen berechnet wurden, vergleichen, und zwar bei den erwachsenen Tieren vom gleichen Geschlecht, in unserem Fall männlichen Tieren, können die Ergebnisse als zuverlässige Art- und Rassenmerkmale gedeutet werden.

1. Hautstruktur des Büffels

In erster Linie zu erwähnen ist, dass die histologische Ausbildung der Büffelhaut sowohl hinsichtlich der Quantität als auch Qualität von den anderen Rindergeschlechtern weit verschieden sind. Die Büffelhaut steht in der Gesamtdicke ausnahmsweise nach der Haut des riesig gewachsenen Holländerstieres. Sonst ist sie nicht nur in ihrer Gesamtdicke sondern auch in der Epidermisdicke viel stärker als die Haut der anderen Rindergeschlechter. Auch die Hornschicht der Epidermis, deren Zellen stellenweise noch im Zustand der Parakeratose befinden, ist dicker als bei den anderen Rindern, was bei der Palpation sehr rauhes Gefühl der Haut verursacht. Hervorzuheben ist die Beschaffenheit der Bindegewebszüge im Korium; diese sind sehr kräftig und laufen mit nur schwachen Windungen und lockeren Verflechtungen, was die Flächenspaltbarkeit der Haut sehr begünstigen. Infolge der Lockerheit der Bindegewebszüge des Koriums ist die Büffelhaut selbst nach dem Gerben leicht deformierbar besonders durch Wasseraufnahme stark quellbar, weshalb die Büffelleder weniger geschätzt ist.

Ganz charakteristisch ist die weitgehendste Armut an Körperhaaren und Hautdrüsen. Die Deckhaare bestehen aus einer grösseren Menge der kurzen feinen Grannenhaaren und einer kleineren Menge der langen groben Grannenhaaren. Das Verhältnis zwischen den beiden Haararten beträgt durchschnittlich 1:0,2. Wenn man nun diese beiden Haararten zusammen in Betracht zieht, so ist die Körperbehaarung beim Büffel etwa 10 bzw. 8 mal dünner als bei Zebus und Hausrindern. Als Folge davon zeigen die Hautdrüsen sehr eigentümliche Entwicklung. Die Talgdrüsen beim Büffel treten in zusammengesetzten Alveoli auf, während dieselbe bei Zebus und Hausrindern eine einfache oder verästelte alveoläre Einzelform zeigen. Sie sind im Vergleich mit den anderen Rindergeschlechtern am grössten, aber an der Zahl am ärmlichsten. Die Zahl der Talgdrüsen pro qcm Flächeneinheit der Haut beim Büffel beträgt nämlich nur 279 d. h. etwa 7 % des Kankrej-Zebus. Das Drüsensekret ist kernhaltig und

weniger fettig. Auch die Schweissdrüse ist in der Grösse am stärksten entwickelt, während ihre Sekretionstätigkeit sehr schwach erscheint.

Bei der Schweissproduktion beim Büffel gegenüber der bei den anderen Rindergeschlechtern werden die Drüsenzellen als solche zum Sekret; Sekretion in wässriger Form findet hier nicht statt; es liegt also eine typische apokrine Drüse vor. Die schwache Sekretionstätigkeit der Schweissdrüse beim Büffel ist ferner mit der schwachen Entwicklung der drüseneigenen Muskulatur verbunden. Die Zahl der Schweissdrüsen pro qcm Hautfläche stimmt mit derjenigen der Deckhaare vollkommen überein, da zu jedem Haar stets eine Schweissdrüse als integrierender Bestandteil gehört.¹⁾ Als Folge davon sind die Schweissdrüsen beim Büffel etwa 10 bzw. 8 mal dünner gebildet als bei Zubus und Hausrindern.

Die Armut an Talg- und Schweissdrüsen, nicht flüssige Beschaffenheit des Schweisses in Verbindung mit schwacher Sekretionkraft der Schweissdrüsen zeigen nun,²⁾ dass beim Büffel der Wärmeregulation durch Wasserverdampfung von der Hautoberfläche, sei es *Perspiratio insensibilis*, sei es Schweissabsonderung, nur geringe Bedeutung zukommt. Infolge der Dickhäutigkeit und der mangelhaften Wasserdampfabgabe von der Haut ist der Büffel nicht imstande genügende Wärme von der Körperfläche abzugeben, was unter der Tropenhitze das Tier unerträglich macht ohne auf anderer Weise Wärmeabgabe zu fördern. Daraus erklärt sich das Badeleben des Büffels.

Nach den Befunden an den Föten in drei verschiedenen Entwicklungsstadien, bei denen die Nacken-Steiss-Länge resp. 29 cm, 38 cm und 62,4 cm betrug, ergab sich:

1) Der Satz, dass bei Säugetieren mit dichtem Haarkleid die Schweissdrüse fast ausschliesslich von einer Haaranlage aus entsteht, ist von CHODAKOWSKI (1871), MARKS (1895), DIEM (1907) und WIMPFHEIMER (1907, vielfach betont worden. Die Ausdehnung dieser Anschauung auf die schwach behaarten Tiere, wie z. B. das Schwein ist jedoch immernoch zurückbehalten (WIMPFHEIMER 1907). In dieser Hinsicht ist sehr interessant, dass selbst bei sehr dünn behaartem Büffel zu jedem Haar eine zugehörige Schweissdrüse zu finden ist.

2) Diese Umstände haben wohl die falsche Auffassung verursacht, dass der Büffel ein schweissdrüsenloses Tier sei.

1. Dass sich die Haar- bzw. Drüsendichtigkeit mit fortschreitenden Entwicklungsstadien vermindert,

2. dass der enorme Unterschied in der Haar- bzw. Drüsendichtigkeit zwischen den Föten und dem Erwachsenen der Vergrößerung der Hautfläche zurückzuführen ist,

3. dass die Haar- bzw. Drüsenarmut keineswegs durch Degeneration der einmal angelegten Haare oder Hautdrüsen verursacht wird, sondern schon erblich determinierte Arteigenschaft sein muss.

Somit ist der Alterseinfluss auf die Büffelhaut besonders während der Wachstumsperiode sehr auffallend. Dagegen kommt der Geschlechtseinfluss auf die Hautstruktur beim Büffel nur in geringerem Masse vor als beim Zebu und Formosarind.

2. Hautstruktur des Zebus

Wesentlich anders ist die Haut des indischen Zebus als die des Büffels, wenn auch die beiden Rinderarten ebenfalls tropischer Herkunft sind. In geringerem Masse, dennoch auch deutlich verschieden ist die Zebuhaut von der Haut des Hausrindes. Unter den Zebus scheint auch gewisse Schwankungen nach verschiedenen Rassen vorhanden zu sein, denn die hier in Betracht kommenden Sind- und Kankrej-Zebus weichen trotz des gemeinsamen Standortes (Bombay-Präsidentschaft) in der Hautdicke, der korialen Beschaffenheit, Talgdrüsenentwicklung usw. mehr oder weniger voneinander ab. Wir können jedoch so weit verallgemeinern, dass der Zebu im Vergleich mit den europäischen Hausrindern viel dünnere Haut aber viel dickere Epidermis besitzt. Die Dicke der ganzen Haut beträgt nämlich beim Sindstier 5925 μ und beim Kankrejtier 5524 μ , während diese beim Holländerstier 8376 μ ist; das Hautkoeffizient (S. 101) ist bei den ersteren zwei Tieren resp. 12,5 und 10,5, dasselbe beträgt beim letzteren 9,2. Wenn wir weiter die Ergebnisse der Hautdickenmessungen von SCHOTTERER (1933), dem das reiche Material aus Braunvieh, Fleckvieh, Blondvieh, Pinzgauer und ungarischem Steppenvieh zur Verfügung stand, in Betracht ziehen, so ist die Dickenverhältnisse

der Zebuhaut noch deutlicher. Bei den Messungen der Häute an der Stichstelle am Hals ergab sich nämlich im Durchschnitt :

	Gesamthaut- dicke in μ	Hautkoeffizient
Kühe über 8 Jahre	5300	7,0
Stiere von 4-8 Jahren	10700	4,0
Ochsen über 8 Jahre	6800	7,0

Hervorzuheben ist noch die Tatsache, dass die Hornschicht der Epidermis beim Zebu äusserst dünn ($9-12 \mu$) ist im Vergleich mit dem Holländer (25μ). Auch in der Körperbehaarung ist der Zebustier etwa $1\frac{1}{2}$ -- 2 mal dichter als der Holländerstier. Dementsprechend sind die Hautdrüsen stärker entwickelt. Während die Talgdrüse beim Zebu weder im Bau noch in der Funktion von denjenigen des Holländers keinen nennenswerten Unterschied zeigt, weichen der Zebu und der Holländer hinsichtlich ihres Umfanges sowie ihrer Dichtigkeit wesentlich voneinander ab; die Talgdrüsen beim Zebu sind immer grösserer und zahlreicher als beim Holländer.

Dasselbe quantitative Verhalten finden wir auch bei der Entwicklung der Schweissdrüsen. Das Verhältnis des Schweissdrüsenumfangs zwischen dem Sind-Zebu und dem Holländer beträgt im Breitenmass $1:0,48$ und im Tiefenmass $1:0,79$. Die Zahl der Windungen des Drüsenkörpers beträgt beim Zebu 2-4 und beim Holländer 1-2; beim letzteren kommt sehr häufig einfacher keulenförmiger Drüsenkörper vor. Was das Zahlenverhältnis der Schweissdrüsen zwischen dem Zebu und dem Holländer anlangt, so ist sie, ganz übereinstimmend mit den Haaren, beim ersteren $1\frac{1}{2}$ -- 2 mal dichter als beim letzteren. Somit ist die Zebuhaut, im Gegensatz zu der Büffelhaut, durch ihre Dünnheit, ihre grosse Flächenausdehnung (Grossohrigkeit, starke Wammenbildung usw.) und ihr Reichtum an den funktionstüchtigen Hautdrüsen für die Abgabe der Körperwärme äusserst günstig. Das gute Gedeihen des Zebus in den Tropen ist z. T. dadurch erklärlich.

3. Hautstruktur des Formosarindes

Dieses subtropische Rind nimmt in seiner Hautstruktur meistens—in der Stärke der Bindegewebsfasern des Koriums, in der Dichtigkeit der Haare und in der Grösse und Zahl sowohl der Talgdrüsen auch der Schweissdrüsen—eine Mittelstellung zwischen dem Zebu und dem Holländer ein. In der Hautdicke macht das Formosarind allerdings von dieser Auffassung Ausnahmen. Wenn auch die Gesamthautdicke des Formosarindes ($6002\ \mu$) von der des Sind-Zebus nicht wesentlich sich unterscheidet, beträgt die Dicke der Epidermis nur $51\ \mu$, infolgedessen der Hautkoeffizient nur 8,5, was unter den in Frage gestellten Rinderrassen den kleinsten Wert aufweist. Merkwürdig ist jedoch hierbei die starke Verdickung der Hornschicht ($27\ \mu$); dieselbe ist beinahe gleich dick wie beim Büffel ($28\ \mu$) und viel dicker als beim Zebu ($9\text{--}12\ \mu$).

Von der quantitativen Entwicklung der Hautdrüsen lässt sich schliessen, dass die Wärmeregulation durch Wasserverdampfung von der Hautoberfläche beim Formosarind stärker als beim Holländer ist, wohl aber schwächer als beim Zebu. Hieraus folgt, dass das Formosarind für die Tropenklimate weniger als der Zebu, besser als der Friesisch-Holländer anpassen kann.

Ganz übereinstimmend mit den Befunden an Büffelföten verhielt sich der Befund an Formosarindsfötus hinsichtlich der Körperbehaarung; das Verhältnis in der Haarzahl pro qcm Hautfläche zwischen dem Erwachsenen und den gleichgeschlechtlichen, sich nahezu vor der Geburt befindlichen Fötus betrug 1:9. Die Verminderung der Haardichtigkeit mit steigendem Alter lässt sich daher auch bei diesem Rindergeschlecht feststellen.

4. Hautstruktur des Holländers

Der als Repräsentant des europäischen Hausrindes hier zur Verfügung gestellte Friesisch-Holländerbulle war ein äusserst wüchsiges Tier; sein Lebendgewicht betrug 919 kg. Dementsprechend fanden wir bei diesem Tierexemplar die grösste Hautstärke ($8376\ \mu$); dieser

Wert ist viel grösser als derjenige der Büffelhaut (6781μ). Der höchste Dickenwert der Holländerhaut rührt allerdings von der stärksten Entwicklung des Koriurns her, während die Dicke der Epidermis sowohl im absoluten als auch im relativen Wert (Hautkoeffizient) hierbei nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Durch die schwache Entwicklung der Epidermis und die starke Entwicklung der Papillarschicht in Verbindung mit der feinsten Bindegewebstextur zeichnet sich die Holländerhaut in ihrer Feinheit und Geschmeidigkeit aus. Die Körperbehaarung beim Holländer ist weniger dicht als beim Zebu; das Verhältnis in der Haarzahl zwischen dem Sind und dem Holländer beträgt etwa 2:1 und dasselbe zwischen dem Kankrej und dem Holländer etwa 1,5:1. Die Folge davon ist, dass die Talg- und Schweissdrüsen beim Holländer, auf eine bestimmte Hautfläche bezogen, in viel geringerer Zahl ausgebildet sind als beim Zebu. Besonders auffällig ist, dass die beiden Hautdrüsen beim Holländer in ihrem Umfang viel kleiner und in der Windung ihres Drüsenkörpers viel schwächer ist als beim Zebu.

Die stark gespannte Bedeckung des Körpers mit ausserordentlich dicker Haut und die schwache Entwicklung der Hautdrüsen sind freilich für die Wärmeabgabe von der Hautoberfläche sehr ungünstig. Schon in Formosa beobachtet man, dass der Holländer im Hochsommer leicht zur Wärmepolypnoe geneigt ist. Auch in den Vereinigten Staaten von Nordamerika ist dieser Rinderschlag meistens im nördlichen Teil zu finden. Diese Beschränkung der Verbreitung des Holländers schreibt DAVIDSON (1927) der hohen Temperatur in Verbindung mit grosser Luftfeuchtigkeit zu. Die schlechte Anpassung des Friesisch-Holländers an das Tropenklima ist also z. T. in seiner eigentümlichen Hautstruktur zu suchen.

V. ALLGEMEINE ZUSAMMENFASSUNG

Es wurden bei je einem Stier und einer Kuh von dem formosanischen Hausbüffel, dem Sind-Zebu und dem formosanischen Rind, einem Stier und Kuhkalb des friesisch-holländischen Hausrindes, und einem Stier von dem Kankrej-Zebu vergleichend-mikroskopische Untersuchungen der Hautstruktur ausgeführt. Die Hautstücke, die in Müller-Formol frisch fixiert, nach Zelloidineinbettung in Serien zerlegt wurden, stammten bei jedem Tier aus 21 Körperregionen, die sich fast auf den ganzen Körper erstreckten. Festgestellt worden sind die Dicke der Gesamthaut, der Epidermis und des Koriums, die Dichte der Behaarung, die Länge der Haarwurzel, und die quantitative Verhältnisse der Talg- und Schweissdrüsen. Dazu wurden noch drei Büffelföten und ein Formosarindsfötus hinsichtlich ihrer Hautstruktur in Betracht gezogen.

Die Hauptegebnisse können wie folgt zusammengefasst werden.

1. Die Zahl der Haarindividuen pro qcm Hautfläche sowohl mit fortschreitenden Entwicklungsstadien im intrauterinen Leben als auch mit zunehmendem Alter im postembryonalen Leben nach und nach verringert.
2. Diese Verminderung der Haardichtigkeit mit steigendem Alter ist der durch das Wachstum des Tieres verursachte Vergrößerung der Körper- bzw. Hautfläche zurückzuführen.
3. Aus demselben Grunde erklärt sich z. T. die dichtere Behaarung im weiblichen Geschlecht als im männlichen, denn das weibliche Tier besitzt eine absolut kleinere Körperfläche als das männliche.
4. Somit sind der Alters- und Geschlechtseinfluss auf die Hautstruktur bei rassenanatomischen Untersuchungen nicht zu vernachlässigen.
5. Die Hautstruktur des Rindergeschlechtes ist, wie schon frühere Forscher angaben, nach Körperregionen starken Schwankungen unterworfen.
6. Wenn wir aber die Durchschnittswerte für verschiedene

Körperregionen bei den erwachsenen Tieren vom gleichen Geschlecht (in unserem Fall männlichen Tieren) vergleichen, können wir gewissermassen Unterschiede der Hautstruktur nach Art und Rasse auffinden.

7. Die Büffelhaut weicht in jeder Hinsicht von den Häuten des Zebus, des Formosarindes und des Holländers wesentlich ab. Die grössere Hautstärke mit dickerer Epidermis, die gröbere Textur des Korioms, die Armut an Haaren und Hautdrüsen, die grössere Form der letzteren, nicht flüssige Beschaffenheit des Sekretes und schwache Sekretionstätigkeit der Schweissdrüsen usw. sind die Hauptmerkmale der Büffelhaut.

8. Wenn auch in geringerem Masse, lässt sich die Zebuhaut von der Haut des Hausrindes immerhin unterscheiden. Die Zebuhaut ist dünner in der Gesamtdicke, aber stärker in der Epidermisdicke, und dichter in der Behaarung. Die Talg- und Schweissdrüsen sind immer grösserer und zahlreicher.

9. Die Holländerhaut zeichnet sich durch die schwache Entwicklung der Epidermis und die starke Entwicklung der Papillarschicht. Trotz der riesigen Wüchsigkeit des Körpers sind die Talg- und Schweissdrüsen entschieden klein und gering an Zahl.

10. Die Hautstruktur des Formosarindes nimmt in jeder Hinsicht eine Mittelstellung zwischen dem Zebu und dem Holländer ein.

11. Vom Standpunkt der Wärmeregulation durch Wärmeabgabe von der Hautfläche betrachtet, ist die Zebuhaut für die Tropen Anpassung am besten und die Büffelhaut am schlechtesten geeignet.

12. Der Büffel kann trotzdem das Tropenklima ertragen, indem er bei hoher Aussentemperatur im Wasser badet.

13. Die Hautstruktur des Holländers ist für die Tropen Anpassung sehr ungünstig, so dass er bei Hitze leicht zur Wärmepolypnoe geneigt ist.

14. Das Formosarind, deren Standort in der subtropischen Gegend liegt, zeigt nach seiner Hautstruktur bessere Anpassungsfähigkeit an die Tropen als der Holländer, wohl aber nicht so stark wie der Zebu.

VI. LITERATURVERZEICHNIS

- AMSCHLER, J. W.: Vergleichende Haut- und Lederuntersuchungen, durchgeführt in bezug auf die drei verbreitesten Rinderschläge des bayerischen und österreichischen Alpenlandes und Alpenvorlandes, nämlich Fleckvieh, Allgäuer und Pinzgauer, zugleich ein Beitrag zur Methodik solcher Forschungen. Arb. d. Deutsch. Gesellschaft. f. Züchtungskunde. Heft 33, 1923.
- *CHODAKOWSKI: Anatomische Untersuchungen über die Hautdrüsen einiger Säugetiere. Inaug.-Diss. Dorpat. 1871.
- DAVIDSON, F. A.: Relation of taurine cattle to climate. Econom. Geogr. Vol. 3, 1927.
- DIEM, F.: Beiträge zur Entwicklung der Schweissdrüsen an der behaarten Haut der Säugetiere. Anat. Hefte. I. Abt. Bd. 34, 1907.
- DUERST, J. U.: Grundlagen der Rinderzucht. Berlin. 1931.
- GONZALEZ, B. M.: The animal improvement program of the College of Agriculture. Philippine Agriculturist. Vol. 21, 1932.
- *MARKS: Untersuchungen über die Entwicklung der Haut insbesondere der Haare und Drüsen. Inaug.-Diss. Berlin. 1835.
- MERKENS, J.: Die Abstammung des Java-Madurarindes. Zeitschr. f. Tierz. u. Züchtungsbiol. Bd. 16, 1929.
- SCHOTTERER, A.: Vergleichende Hautuntersuchungen bei Rindern. Zeitschr. f. Züchtung. Reihe B. Bd. 26, 1933.
- WIMPFHEIMER, C.: Zur Entwicklung der Schweissdrüsen der behaarten Haut. Anat. Hefte. I. Abt. Bd. 34, 1907.

Zwei Abhandlungen mit * waren uns im Original nicht zugänglich.

VII. TAFELERKLÄRUNG

Die farbigen Abbildungen der Tafeln IX-XI wurden von Herrn Kunstmaler B. SAKUMA hergestellt, und zwar wurden nach Schnittpräparaten sowie nach Mikrophographien in derselben Vergrößerung mit den letzteren gezeichnet. Schnittdicke 25 μ , Färbung nach v. GIESON in Kombination mit DELAFLELD's Hämatoxylinlösung.

Tafel IX.

Abb. 1. Senkrechter Schnitt durch die Stirnhaut eines Büffelstieres. $\times 24$.

Abb. 2. Derselbe eines Kankrej-Zebustieres. $\times 24$.

Abb. 3. Derselbe eines 8 Monate alten Holländerkuhkalbes. $\times 24$.

Man vergleiche Dicke der Epidermis, Papillarentwicklung, Verteilung der Haare und Hautdrüsen, Dicke und Verlauf der Koriumfasern usw.

Tafel X.

Abb. 1. Flächenschnitt durch die Stirnhaut eines männlichen Büffelfötus (Nackensteisslänge 62,4 cm; Körpergewicht 20 kg). $\times 45$.

Abb. 2. Derselbe eines Büffelstieres. $\times 46$.

Tafel XI.

Abb. 1. Flächenschnitt durch die Stirnhaut eines Kankrej-Zebustieres. $\times 46$.

Abb. 2. Derselbe eines 8 Monate alten Holländerkuhkalbes. $\times 46$.

In Tafel X und XI vergleiche man Dichte der Behaarung und Dicke der Koriumfasern. Man beachte auch einen Querschnitt eines Ausführungsganges der Schweissdrüse für je einen Querschnitt einer Haarwurzel.

Tafel XII.

Abb. 1. Schnitt durch einen Schweissdrüsenkörper eines Kankrej-Zebustieres. Das Drüsenepithel besteht aus niedrigen, nahezu plattenförmigen Zellen; die Schweissabsonderung erfolgt in wässriger Form ohne Zelldegeneration: ekkrine Drüse. $\times 250$.

Abb. 2. Schnitt durch einen Schweissdrüsenkörper eines Büffelstieres. Das Drüsenepithel besteht, im Gegensatz zu Zebus und Hausrindern, aus mehr zylindrischen Zellen; die Epithelzellen enthalten häufig feine oder grobe Pigmentkörner. Bei der Sekretion gehen die Drüsenzellen zugrunde; im Lumen befinden sich abgestossene Epithelien: apokrine Drüse. $\times 250$.

Man bemerke auch Unterschiede in der Dicke der Koriumfasern zwischen den beiden Rinderarten.

Abkürzungen: *Cap.* Blutkapillare. *Ep.* Die ins Lumen abgestossenen Epithelzellen. *Hw.* Haarwurzel. *fHw.* Wurzeln der feineren Grannenhaare. *gHw.* Wurzeln der gröberen Grannenhaare. *Hz.* Haarzwiebel. *Schw.d.* Schweissdrüse. *Schw.g.* Ausführungsgang der Schweissdrüse. *T.* Talgdrüse.



Abb. 1.



Abb. 2.



Abb. 3.

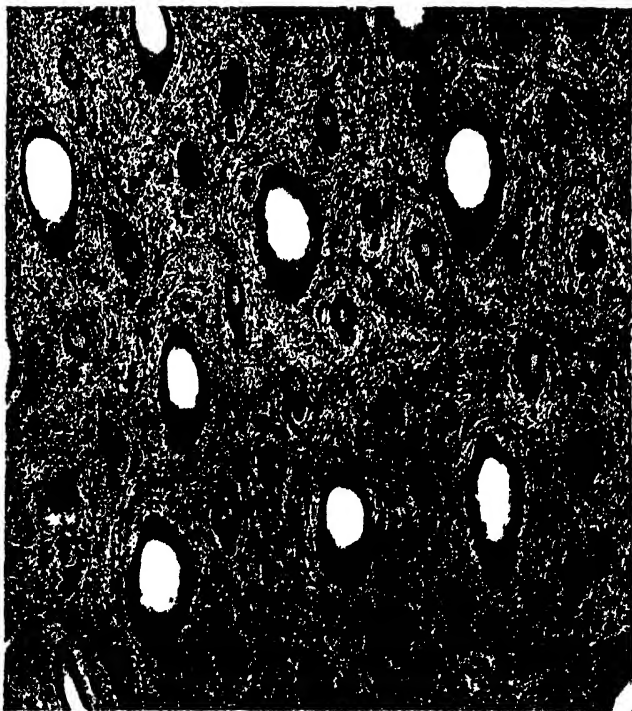


Abb. 1.

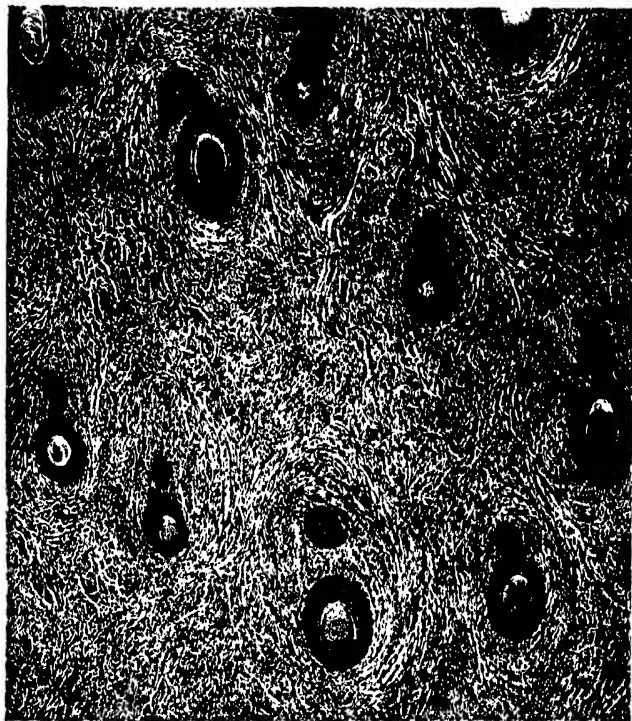


Abb. 2.

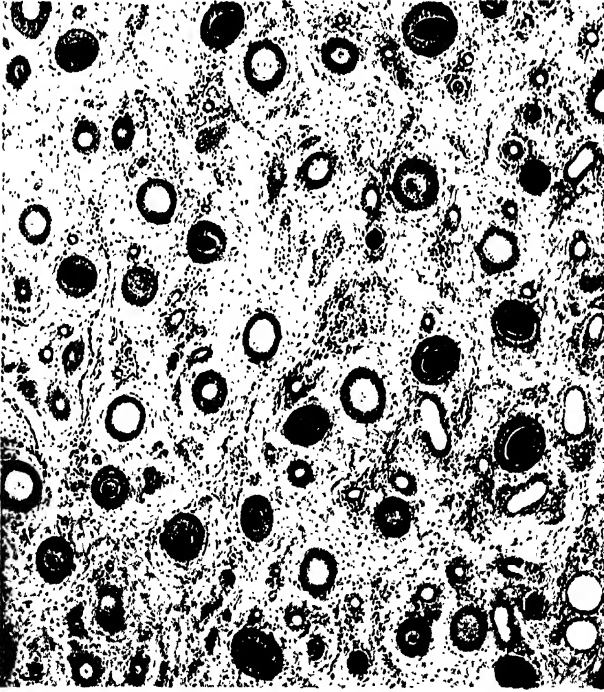


Abb. 1.

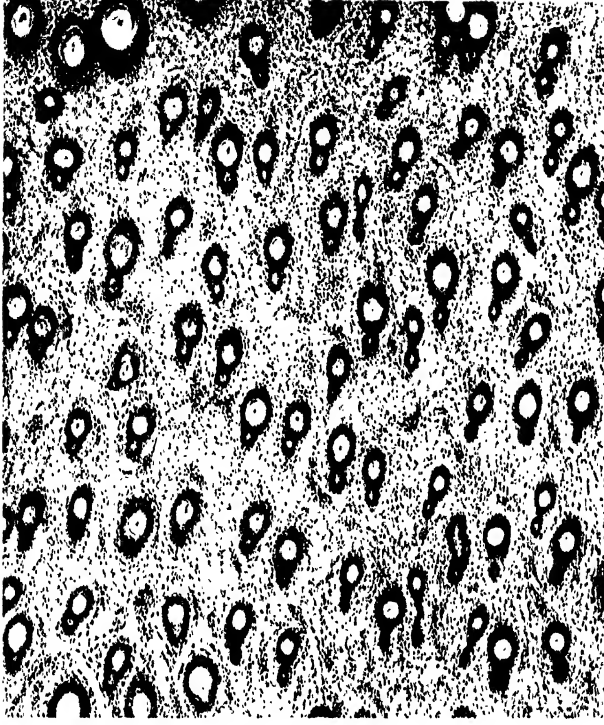
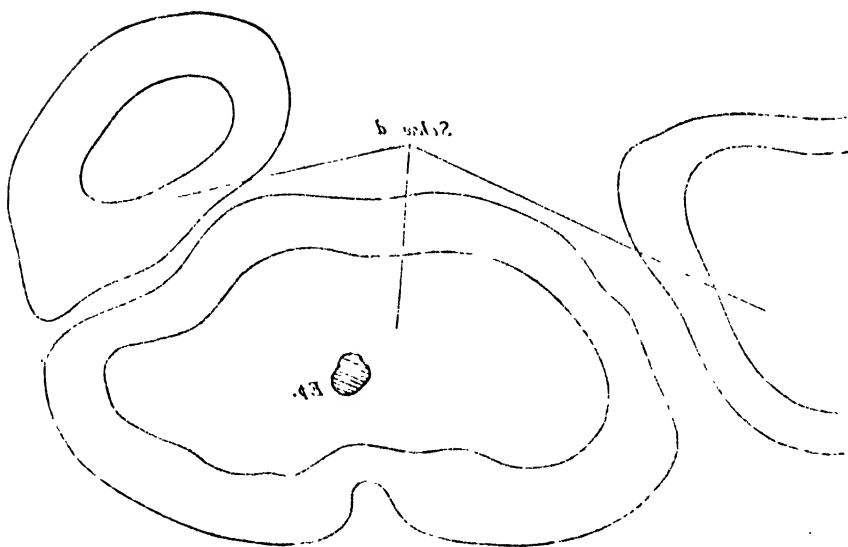
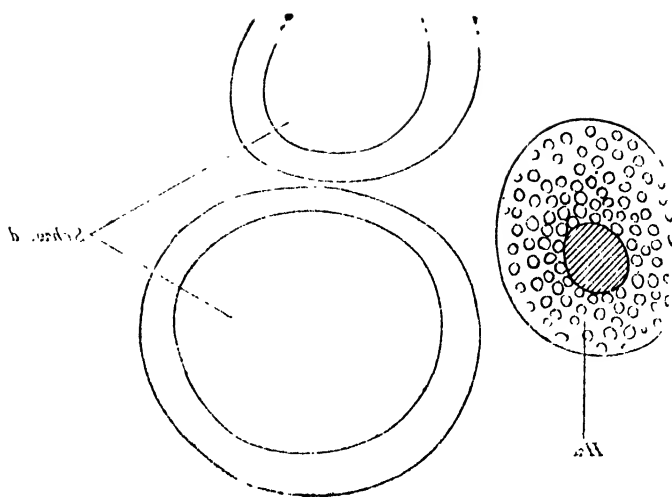


Abb. 2.



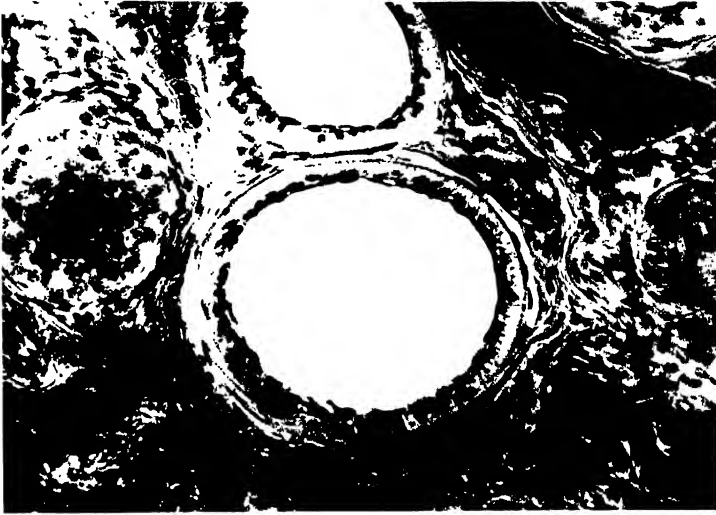


Abb. 1.



Abb. 2.

臺北帝國大學理農學部紀要

第二十卷 第一號

昭和十二年八月

MEMOIRS
OF THE
FACULTY OF SCIENCE
AND
AGRICULTURE

29-9-37

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

Vol. XX, No. 1. *only*

AUGUST, 1937



BABA, Tamezi:

Die Untersuchungen über die Maltosegärung und deren
Intermediär gebildete Phosphorsäure-ester.



PUBLISHED

BY THE

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

FORMOSA, JAPAN

PUBLICATION COMMITTEE

Professor Jinshin YAMANE, Dean of the Faculty (*ex officio*)

Professor Ichirô HAYASAKA

Professor Tyôzaburo TANAKA

The MEMOIRS OF THE FACULTY OF SCIENCE AND AGRICULTURE, Taihoku Imperial University, are published occasionally by the University, which exchanges them with the publications of other learned bodies and institutions throughout the world. Separate series will be sent to individual research institutions, and complete series to the central libraries of universities and larger institutions. Copies of the Memoirs may also be obtained from MARUZEN COMPANY LTD., Tôkyô, Japan, and THE TAIWAN NICHI-NICHI SHIMPÔ-SHA, Taihoku, Formosa, Japan.

All communications regarding the Memoirs should be addressed to the Dean of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imperial University, Taihoku, Formosa, Japan.

DIE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE MALTOSE- GÄRUNG UND DEREN INTERMEDIÄR GEBIL- DETE PHOSPHORSÄURE-ESTER

Mit 3 Abbildungen im Text

Tamezi BABA

(Eingegangen am 25. Juli 1937)

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
I. Einleitung	3
II. Untersuchung des Verhältnisses von Mono-phosphat- zur Di-phosphat- zur CO ₂ -Bildung bei Behandlung von Maltose mit frischer Patzenhofer Unterhefe, mit Trockenhefe aus derselben Hefe-fertigung sowie mit Mazerationssaft aus der gleichen Trockenhefe.	5
III. Isolierung und Untersuchung der bei der Behandlung von Maltose mit frischer Hefe, Trockenhefe sowie Hefenmazerationssaft in Gegenwart von Phosphat gebildeten Mono-phosphorsäure-ester... ..	15
A. Untersuchung des Barium-mono-phosphor- säure-esters, gewonnen mit frischer Hefe ...	16
B. Untersuchung des Mono-phosphats, gewonnen mit Trockenhefe... ..	16
C. Untersuchung des Mono-phosphats, gewonnen mit Mazerationssaft	17
D. Entfernung des ROBISON-esters aus den A- und B- Präparaten mit der zur Oxydation von Aldosen empfohlenen Methodik	19
E. Untersuchung der Gemische von NEUBERG-	

	Seite
ester und trehalose-mono-phosphorsaurem Barium	19
IV. Vergleichende Untersuchungen über die biochemische Bildung von optisch aktiver Phosphoglycerinsäure aus Maltose und verschiedenen Zuckern	22
1. Vorversuche mit verschiedenen Mengen Phosphat, Maltose und Acetaldehyd	22
2. Vorversuche mit Maltose und mit Rohrzucker bei verschiedenen Hexose-di-phosphatmengen.	24
3. Vergleichende Versuche über die Bildung von Phosphoglycerinsäure aus Rohrzucker, Maltose, Glucose und Fructose durch Hefenmazerationssaft	24
4. Vergleichende Versuche über die Phosphoglycerinsäure-bildung aus Rohrzucker, Maltose, Glucose und Fructose durch frische Hefe in Gegenwart von Toluol	25
V. Untersuchungen über den Abbau des aus Maltose gebildeten Hexose di-phosphats durch ein Enzym der Tabakblätter	26
1. Versuche mit Saft frischer Tabakblätter (Basma serie Zigarettentabak und Geudertheimer Zigarrentabak) bei verschiedenen Konzentrationen an Hexose-di-phosphat	26
2. Versuche mit dachtrocknem Zigarettentabak (Basma serie)	30
3. Versuche mit Alkohol-Aether-präparat von Geudertheimer Zigarrentabak	31
VI. Erörterung und Zusammenfassung	32
Literatur	36

I. EINLEITUNG

Ein wichtigster Zucker in der Gärungsindustrie ist die Maltose, deren Gärungsmechanismus sowie bei der Vergärung von Maltose intermediär entstehende Phosphorsäure-ester wenig bekannt sind. Es ist schon festgestellt, dass bei der alkoholischen Spaltung von Zuckern, Rohrzucker, Glucose, und Fructose, die Phosphorylierung eine wichtige Rolle⁽¹⁾ spielt, wodurch sie verestert und dann in die 3-C-Stufe übergeführt werden und damit der erste Schritt der Zuckerspaltung herbeigeführt wird.

Frühere Untersuchungen hatten ergeben, dass sich Glucose, Fructose und Mannose bei der Phosphorylierung mindestens in qualitativer Hinsicht gleich verhalten und dieselben Ester liefern; insbesondere hat sich das bei dieser biochemischen Reaktion gebildete Zymo-diphosphat in allen Fällen als der 1, 6-Di-phosphorsäure-ester der 2, 5-am-Fructose erwiesen⁽²⁾. Es ergab sich sodann, dass wenn man die Mono-phosphorsäure-ester in Betracht zieht, Unterschiede obwalten. Die erste diesbezügliche Beobachtung rührt von I. St. NEUBERG und Cl. OSTENDORF⁽³⁾ her. Die Autorinnen zeigten, dass unter den Bedingungen, unter welchen aus der isomeren Glucose und Fructose überwiegend Diphosphat hervorgeht, die Mannose im wesentlichen mono-phosphoryliert wird. R. ROBISON⁽⁴⁾ hat darauf festgestellt, dass bei der zur Phosphorylierung führenden Behandlung der Mannose (wie auch der Glucose und des Fruchtzuckers) neben den bisher bekannten Zuckerphosphaten ein Mannose-phosphorsäure-ester auftritt. Wichtig ist ferner der Befund von R. NILSSON⁽⁵⁾, dass auch aus Galaktose neben einem unbekannten Mono-phosphat typischer Hexose-di-phosphorsäure-ester entsteht.

Es war nun aus verschiedenen Gründen von Interesse, das Verhalten eines reduzierenden Di-saccharids bei dieser biochemischen Synthese zu untersuchen. Ich stellte meine Versuche mit Maltose an, im Hinblick auf zwei Gesichtspunkte. Einmal gibt es nach R. WILLSTÄTTER und W. STEIBELT⁽⁶⁾ eine direkte Vergärung der Maltose, ohne dass α -Glucosidase zuvor eine Hydrolyse des Malzzuckers herbeiführt. Sodann hat B. HVISTENDAHL⁽⁷⁾ die Behauptung aufgestellt, dass der

Ester, der bei der Phosphorylierung auftritt, ein Derivat der Maltose ist. Es bestand die Möglichkeit, namentlich im Hinblick auf die Befunde von WILLSTÄTTER und STEIBELT, dass die letzte Anschauung zutreffend ist. Es war aber auch damit zu rechnen, dass die Maltose, wenn sie vor Vollzug der Phosphorylierung der enzymatischen Spaltung unterliegt, die bekannten Mono-phosphorsäure-ester und das Zymo-di-phosphat in anderem Verhältnis liefern würde, weil während der Hydrolyse sich ja Glucose in statu nascendi befindet.

Es war bei der gestellten Aufgabe zugleich wichtig, zwecks Erlangung einer befriedigenden Übersicht vergleichsweise frische Hefe, aus demselben Material bereitete Trockenhefe und aus dieser wiederum gewonnenen Mazerationssaft zu benutzen und diese biologischen Agenzien stets in Form des identischen Ausgangsmaterials gleicher Fertigung heranzuziehen.

Es ist eine noch nicht beantwortete Frage, ob die Phosphoglycerinsäure ein zwangsläufiges Durchgangsprodukt der Zuckergärung sei. Es ist bereits bekannt, dass, wie aus Glucose so auch aus Rohrzucker⁽⁸⁾ oder aus dessen Spaltungsprodukten, Glucose und Fructose⁽⁸⁾, mittels Hefe Phosphoglycerinsäure dargestellt werden kann. Bisher fehlten aber Erfahrungen darüber, wie sich die verschiedenen Mono-saccharide und aldehydische Disaccharide in dieser Beziehung verhalten, auch war ein quantitativer Vergleich der Phosphoglycerinsäure-bildung aus den einzelnen Kohlenhydraten bislang nicht ausgeführt. Ich habe darum auch derartige Versuche mit Glucose, Fructose, Rohrzucker und Maltose vorgenommen. Letztere ist noch gar nicht Gegenstand einer Prüfung gewesen, und es war nicht vorauszusehen, ob sie überhaupt als Ausgangsmaterial brauchbar sei, weil ihre Eignung für den erwähnten Zweck eine fermentative Spaltbarkeit des Malzzuckers bei der innezuhaltenden Milieuvorgiftung voraussetzt.

Es ist schon bekannt, dass Hexose-phosphorsäure-ester und Methylglyoxal bei der alkoholischen Gärung⁽⁹⁾ sowie bei dem Kohlenhydratabbau von tierischen⁽¹⁰⁾ und pflanzlichen⁽¹¹⁾ Zellen auftreten. Es ist eine wichtige Frage des allgemeinen Kohlenhydratstoffwechsels, ob Hexose-di-phosphat dabei über C_3 -Zucker in Methylglyoxal übergeführt

werde, während aus Hexose-mono-phosphat direkt kein Triosephosphat entsteht. Nun war es von Interesse, zunächst zu untersuchen, ob allgemeine tierische und pflanzliche Gewebe den Übergang von Hexose-di-phosphat in Triose bzw. Triose-phosphorsäure-ester bewirken.

Nach Anzeichen, die von früheren Autoren beobachtet waren, haben MEYERHOF und LOHMANN⁽¹²⁾ zuerst Triose-mono-phosphat bei der Umsetzung von Hexose-di-phosphorsäure durch Muskel und Hefemazerations-saft in Substanz isoliert und in analysenreinem Zustande erhalten; es handelt sich um eine Depolymerisation des Hexosederivats zum Mono-phosphorsäure-ester des Dioxyacetons. Dass eine Methylglyoxalvorstufe, die man nach den genannten Ergebnissen als einen Triose-phosphorsäure-ester ansprechen darf, sowohl durch Trockenpräparate von Hefen⁽¹³⁾ als durch solche von Schimmelpilzen, Milchsäure- und Coli-bakterien sowie durch Alkohol-Äther-präparate von gekeimten Erbsen und Bohnen aus Hexose-di-phosphat gebildet wird, ist von NEUBERG und KOBEL⁽¹⁴⁾ mitgeteilt worden.

Es fehlte eine Untersuchung darüber, ob mit grünen Blättern diese Reaktion ebenfalls vor sich geht. Ich wählte hierzu das Enzymsystem der Tabakblätter und das aus Maltose gebildete Hexose-di-phosphat.

Im einzelnen verfuhr ich folgendermassen:

II. UNTERSUCHUNG DES VERHÄLTNISSSES VON MONO- PHOSPHAT- ZUR DI-PHOSPHAT- ZUR CO₂-BILDUNG BEI BEHANDLUNG VON MALTOSE MIT FRISCHER PATZENHOFER UNTERHEFE, MIT TROCKEN- HEFE AUS DERSELBEN HEFE-FERTIGUNG SOWIE MIT MAZERATIONSSAFT AUS DER GLEICHEN TROCKENHEFE

Zusammensetzung der Versuchslösungen:

A. Ansätze mit frischer Unterhefe

100 ccm 20%ige Maltoselösung,

50 ccm $\frac{2}{3}$ m Phosphatpuffer von pH 6,6,

40 g frische Hefe,
10 ccm Wasser,
6 ccm Toluol.

B. Ansätze mit Trocken-unterhefe

100 ccm 20%ige Maltoselösung,
50 ccm $\frac{2}{3}$ m Phosphatpuffer von pH 6,6,
50 ccm Wasser,
20 g Trockenhefe,
2 ccm Toluol.

C. Ansätze mit Hefen-Mazerationssaft

30 ccm 50%ige Maltoselösung,
30 ccm $\frac{2}{3}$ m Phosphatpuffer von pH 6,6,
120 ccm Hefen-Mazerationssaft,
1,8 ccm Toluol.

Die Gemische wurden gut durchgeschüttelt. Je 2 ccm davon dienten zur Verfolgung der CO_2 -Entwicklung im FINK-schen Apparat; Temperatur 30° . Die Resultate der Analysen sind in den Tabellen IV bis VI zusammengestellt.

Zu den in den Tabellen I bis III angeführten Zeiten wurden Proben zur Bestimmung des im Reaktionsgemisch vorhandenen anorganischen Phosphats entnommen, und die Reste der Versuchslösungen¹ durch Zugabe von je 25 ccm 20%iger Trichloressigsäure enteiweisst. Nach Filtration über Fullererde wurden je 100 ccm der Filtrate mit kalt gesättigtem Barytwasser gegen Phenolphthalein neutralisiert; ein etwaiger Überschuss von Baryt wurde sofort durch Einleiten von CO_2 beseitigt. Sodann wurden 20 ccm 25%ige Barium-

1. Bei Verwendung von frischer und getrockneter Hefe wurde für die analytischen Bestimmungen zu den verschiedenen Zeiten je ein gesonderter, im übrigen identischer Versuch vorgenommen; er wurde jedesmal ganz aufgearbeitet, weil absolut gleichmässige Entnahmen aus den inhomogenen Gemischen schwierig sind. In Versuchen mit dem auf übliche Art bereiteten Saft konnten aliquote Teile eines grösseren Ansatzes analysiert werden.

acetatlösung und 10% des Gesamtvolumens an Äthylalkohol hinzugefügt. Die Mischungen blieben zur vollständigen Ausfällung des hexose-di-phosphorsauren Bariums über Nacht stehen; am nächsten Tage wurde zentrifugiert. Durch Subtraktion des anorganischen Phosphats vom Gesamt-phosphorgehalt der Zentrifugate wurde der Gehalt an Mono-phosphat-P ermittelt. Auf die gleiche Weise wurden aus den Werten für anorganischen und Gesamt-phosphor des in Trichloressigsäure gelösten Bariumsalzniederschlags die Mengen des Di-phosphat-P gefunden. Die Werte für Mono-phosphat-P und Di-phosphat-P sowie gesamtorganischen P, umgerechnet auf je 200 ccm Versuchsgemisch (bzw. 180 ccm bei Mazerationssaft), sind aus den Tabellen I bis III zu ersehen.

Durch Division des Mono-phosphat-phosphors in 200 ccm durch 31 sowie des Di-phosphat-phosphors durch 62 erhält man die Quantitäten Millimol von Mono-phosphat und Di-phosphat, die zu den verschiedenen Zeiten in den Reaktionsgemischen vorhanden sind. Sie sind aus den *Kurven 1 und 2 der Abb. 1 bis 3* abzulesen. Die *Kurven 3* geben die Summen von Mono-phosphat+Di-phosphat in Millimol an, die *Kurven 4* die Geschwindigkeit der CO_2 -Entwicklung.

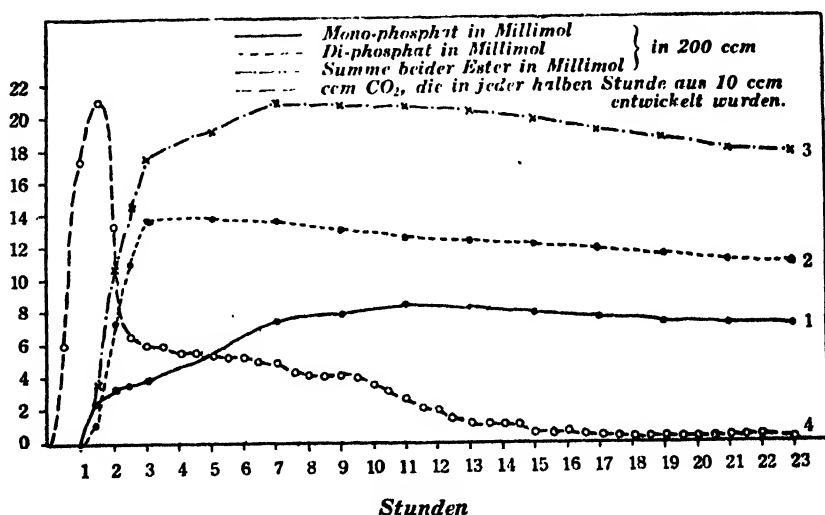


Abb. 1. Versuche mit frischer Hefe.

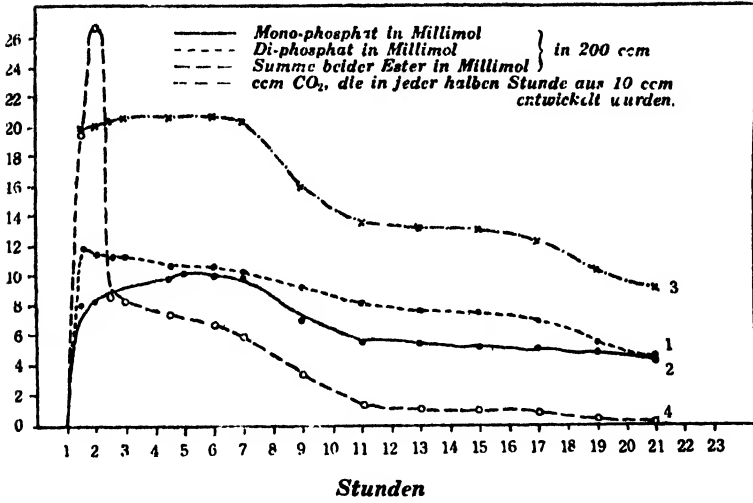


Abb. 2. Versuche mit Trockenhefe.

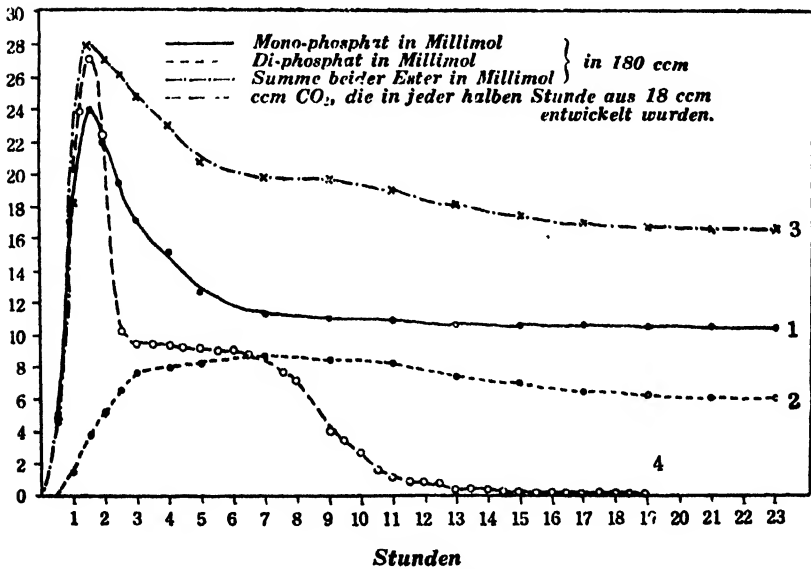


Abb. 3. Versuche mit Mazerationssaft.

Tabelle I.

A. Versuche mit frischer Hefe.

Gärdauer in Std.	mg P als Mono- phosphat in je 200 ccm Versuchsgemisch		mg P als Di-phosphat in je 200 ccm Versuchsgemisch		Summe von Mono-phosphat-P und Di-phosphat-P in 200 ccm mg		mg organisch gebundener P in je 200 ccm Versuchsgemisch berechnet aus der Abnahme von anorganischem P	
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1½	81,24	—	64,98	—	146,22	—	144	—
2	101,40	115,82	452,47	325,17	553,87	440,99	586	468
2½	108,60	—	688,11	—	796,71	—	836	—
3	116,97	129,49	857,53	807,03	974,32	936,52	986	970
5	163,84	220,83	858,39	833,17	1022,23	1054,05	1054	1090
7	226,01	256,06	844,70	840,43	1070,71	1096,49	1058	1106
9	242,93	—	804,74	—	1047,67	—	1050	—
11	259,50	—	770,32	—	1029,82	—	1046	—
13	248,57	—	763,27	—	1011,84	—	1018	—
15	240,75	—	747,45	—	988,20	—	1010	—
17	232,00	—	722,97	—	954,97	—	982	—
19	224,73	—	707,63	—	932,36	—	962	—
21	218,92	—	674,47	—	893,39	—	946	—
23	219,50	—	669,77	—	889,27	—	918	—

Tabelle I.

(Fortsetzung).

Gärdauer in Std.	millimol Mono-phosphat in 200 ccm		millimol Di-phosphat in 200 ccm		Summe der beiden Ester in 200 ccm millimol	
1	0	0	0	0	0	0
1½	2,62	—	1,04	—	3,66	—
2	3,27	3,73	7,29	5,24	10,56	8,97
2½	3,50	—	11,10	—	14,60	—
3	3,77	4,17	13,83	13,01	17,63	17,18
5	5,28	7,12	13,84	13,43	19,12	20,55
7	7,29	8,26	13,62	13,55	20,91	21,81
9	7,83	—	12,98	—	20,81	—
11	8,37	—	12,42	—	20,79	—
13	8,01	—	12,31	—	20,32	—
15	7,76	—	12,05	—	19,81	—
17	7,48	—	11,66	—	19,14	—
19	7,25	—	11,41	—	18,66	—
21	7,06	—	10,87	—	17,93	—
23	7,08	—	10,80	—	17,88	—

Tabelle II.
B. Versuche mit Trockenhefe.

Gärdauer in Std.	mg P als Mono- phosphat in je 200 ccm Versuchsgemisch	mg P als Di-phosphat in je 200 ccm Versuchsgemisch	Summe von Mono-phosphat-P und Di-phosphat-P in 200 ccm mg	mg organisch gebundener P in je 200 ccm Versuchsgemisch berechnet aus der Abnahme an anorganischem P
1½	249,10	738,77	987,87	946
2	257,73 246,57	722,14 732,44	979,87 979,01	952 952
2½	270,02	717,35	987,37	952
3	281,37	713,93	995,30	950
4½	300,08	671,27	971,35	954
5	310,93	699,44	1010,37	956
6	309,85	666,40	976,25	950
7	316,89	641,62	958,51	954
9	213,14	568,64	781,78	796
11	171,44	492,07	663,51	690
13	167,94	481,47	649,41	618
15	165,02	470,93	635,95	593
17	162,68	426,93	589,61	590
19	149,22	334,49	483,71	542
21	147,89	271,78	419,67	540

Tabelle II.
(Fortsetzung).

Gärdauer in Std.	millimol Mono-phosphat in 200 ccm	millimol Di-phosphat in 200 ccm	Summe der beiden Ester in 200 ccm millimol
1½	8,03	11,91	19,94
2	8,31 7,95	11,64 11,81	19,95 19,76
2½	8,71	11,57	20,28
3	9,07	11,51	20,58
4½	9,68	10,82	20,50
5	10,03	11,28	21,31
6	9,99	10,70	20,69
7	10,22	10,34	20,56
9	6,87	9,17	16,04
11	5,53	7,93	13,46
13	5,41	7,76	13,17
15	5,32	7,59	12,91
17	5,24	6,88	12,12
19	4,81	5,39	10,20
21	4,77	4,38	9,15

Tabelle III.

C. Versuche mit Mazerationssaft.

Gärdauer in Std.	mg P als Mono-phosphat in je 180 ccm Gärgemisch	mg P als Di-phosphat in 180 ccm Gärgemisch	Summe von Mono-phosphat-P und Di-phosphat-P in 180 ccm Gärgemisch mg	mg organisch gebundener P, berechnet aus der Abnahme an anorganischem P in 180 ccm Gärgemisch
$\frac{1}{2}$	147,19	0	147,19	147,6
1	516,74	71,50	588,24	680,4
$1\frac{1}{2}$	747,53	234,74	982,27	997,2
2	680,64	319,26	999,90	997,2
$2\frac{1}{2}$	599,69	417,73	1017,42	997,2
3	528,02	475,24	1003,26	997,2
4	469,70	488,43	958,13	995,4
5	390,66	502,71	893,37	978,2
7	346,66	533,66	880,32	957,0
9	344,69	517,20	861,89	930,3
11	335,00	507,89	842,89	905,8
13	329,72	462,04	791,76	890,2
15	325,43	426,30	751,73	875,6
17	327,23	396,46	723,69	861,2
19	325,57	393,29	718,86	848,6
21	323,64	386,89	710,53	825,2
23	323,63	383,83	707,46	803,6

Tabelle III.

(Fortsetzung).

Gärdauer in Std.	millimol Mono-phosphat in 180 ccm	millimol Di-phosphat in 180 ccm	Summe der beiden Ester in 180 ccm millimol
$\frac{1}{2}$	4,74	0	4,74
1	16,99	1,15	18,14
$1\frac{1}{2}$	24,11	3,78	27,89
2	21,95	5,14	27,09
$2\frac{1}{2}$	19,34	6,73	26,07
3	17,03	7,66	24,69
4	15,15	7,84	22,99
5	12,60	8,10	20,70
7	11,18	8,60	19,78
9	11,11	8,34	19,45
11	10,80	8,19	18,99
13	10,63	7,45	18,08
15	10,49	6,87	17,36
17	10,55	6,39	16,94
19	10,50	6,34	16,84
21	10,44	6,24	16,68
23	10,43	6,19	16,62

Tabelle IV.

A. Versuche mit frischer Hefe.

CO₂ ccm

Gärdauer in Std.	aus je 200 ccm Versuchsgemisch	Differenz für 200 ccm in jeder $\frac{1}{2}$ Std.	Differenz für je 10 ccm
$\frac{1}{2}$	120	120	6,00
1	470	350	17,50
1 $\frac{1}{2}$	890	420	21,00
2	1155	265	13,25
2 $\frac{1}{2}$	1285	130	6,50
3	1405	120	6,00
3 $\frac{1}{2}$	1525	120	6,00
4	1635	110	5,50
4 $\frac{1}{2}$	1745	110	5,50
5	1850	105	5,25
5 $\frac{1}{2}$	1955	105	5,25
6	2060	105	5,25
6 $\frac{1}{2}$	2160	100	5,00
7	2260	100	5,00
7 $\frac{1}{2}$	2345	85	4,25
8	2425	80	4,00
8 $\frac{1}{2}$	2505	80	4,00
9	2585	80	4,00
9 $\frac{1}{2}$	2665	80	4,00
10	2735	70	3,50
10 $\frac{1}{2}$	2795	60	3,00
11	2845	50	2,50
11 $\frac{1}{2}$	2885	40	2,00
12	2925	40	2,00
12 $\frac{1}{2}$	2955	30	1,50
13	2975	20	1,00
13 $\frac{1}{2}$	2995	20	1,00
14	3015	20	1,00
14 $\frac{1}{2}$	3035	20	1,00
15	3045	10	0,50
15 $\frac{1}{2}$	3055	10	0,50
16	3070	15	0,75
16 $\frac{1}{2}$	3080	10	0,50
17	3085	5	0,25
17 $\frac{1}{2}$	3090	5	0,25
18	3095	5	0,25
18 $\frac{1}{2}$	3100	5	0,25
19	3105	5	0,25
19 $\frac{1}{2}$	3110	5	0,25
20	3115	5	0,25
20 $\frac{1}{2}$	3120	5	0,25
21	3125	5	0,25
21 $\frac{1}{2}$	3130	5	0,25
22	3135	5	0,25
23	3135	0	0

Tabelle V.
B. Versuche mit Trockenhefe
CO₂ ccm

Gärdauer in Std.	aus je 200 ccm Versuchsgemisch	Differenz für 200 ccm in jeder $\frac{1}{4}$ Std.	Differenz für je 10 ccm
1 $\frac{1}{4}$	388	388	19,40
2	922	534	26,70
2 $\frac{1}{4}$	1095	173	8,65
3	1258	163	8,15
4 $\frac{1}{4}$	1693	145	7,25
6	2094	133	6,65
7	2247	117	5,85
9	2507	65	3,25
11	2600	23	1,15
13	2689	22	1,10
15	2768	20	1,00
17	2833	16	0,80
19	2845	3	0,15
21	2850	1	0,05

Tabelle VI.
C. Versuche mit Mazerationssaft
CO₂ ccm

Gärdauer in Std.	aus je 180 ccm Versuchsgemisch	Differenz für 180 ccm in jeder $\frac{1}{4}$ Std.	Differenz für je 18 ccm
$\frac{1}{4}$	45	45	4,50
1	283,5	238,5	23,85
1 $\frac{1}{4}$	553,5	270,0	27,00
2	775,5	222,0	22,20
2 $\frac{1}{4}$	876,5	101,0	10,10
3	972,0	95,5	9,55
3 $\frac{1}{4}$	1066,5	94,5	9,45

Tabelle VI.
(Fortsetzung).

Gärdauer in Std.	aus je 180 ccm Versuchsgemisch	Differenz für 180 ccm in jeder $\frac{1}{2}$ Std.	Differenz für je 18 ccm
4	1161,0	94,5	9,45
4 $\frac{1}{2}$	1253,5	92,5	9,25
5	1345,5	92,0	9,20
5 $\frac{1}{2}$	1435,5	90,0	9,00
6	1525,5	90,0	9,00
6 $\frac{1}{2}$	1615,5	90,0	9,00
7	1701,0	85,5	8,55
7 $\frac{1}{2}$	1777,5	76,5	7,65
8	1849,5	72,0	7,20
8 $\frac{1}{2}$	1921,5	72,0	7,20
9	1962,0	40,5	4,05
9 $\frac{1}{2}$	1998,0	36,0	3,60
10	2025,0	27,0	2,70
10 $\frac{1}{2}$	2038,5	13,5	1,35
11	2018,5	10,0	1,00
11 $\frac{1}{2}$	2057,5	9,0	0,90
12	2066,5	9,0	0,90
12 $\frac{1}{2}$	2074,5	8,0	0,80
13	2078,5	4,0	0,40
13 $\frac{1}{2}$	2032,5	4,0	0,40
14	2036,5	4,0	0,40
14 $\frac{1}{2}$	2038,5	2,0	0,20
15	2090,0	1,5	0,15
15 $\frac{1}{2}$	2092,0	2,0	0,20
16	2094,0	2,0	0,20
16 $\frac{1}{2}$	2095,0	1,0	0,10
17	2096,0	1,0	0,10
17 $\frac{1}{2}$	2097,0	1,0	0,10
18	2098,0	1,0	0,10
18 $\frac{1}{2}$	2098,0	0	0

III. ISOLIERUNG UND UNTERSUCHUNG DER BEI DER BEHANDLUNG VON MALTOSE MIT FRISCHER HEFE, TROCKENHEFE SOWIE HEFENMAZERATIONS- SAFT IN GEGENWART VON PHOSPHAT GEBILDETEN MONO-PHOSPHOR- SÄURE-ESTER

Zur Isolierung der durch frische Hefe erzeugten Mono-phosphorsäure-ester wurden zehn Versuche von jeweils der zehnfachen Menge der unter A., S. 5 mitgeteilten Zusammenstellung, zur Abscheidung der durch Trockenhefe hervorgebrachten Kohlenhydrat-mono-phosphate zehn 2-Liter-Ansätze, von der unter B., S. 6 beschriebenen Zusammensetzung, und zwecks Gewinnung des durch Mazerationssaft produzierten Mono-phosphats vier zehnmal so grosse Versuche wie nach C., S. 6 angestellt. Temperatur 30°; die Versuchszeiten betrugen bei der Serie A.: 11 Stunden, bei B.: 7 Stunden, bei den C.-Ansätzen 2 Stunden. Die Isolierung der Ester geschah in der bei C. NEUBERG und M. KOBEL⁽¹⁵⁾ angegebenen Weise.

Nach Ablauf der genannten Zeiten wurde die Gärung durch Zugabe von 70 bis 120 ccm 75%iger Trichloressigsäure zu je einem der 2- bzw. 1,8-Liter-ansätze unterbrochen. Nach Zusatz von Fullererde wurde filtriert. Die zusammengehörigen Filtrate der zehn A-Versuche, der zehn B-Ansätze bzw. der vier C-Gemische wurden vereinigt und mit Natronlauge gegen Phenolphthalein vorsichtig und genau neutralisiert. Dann wurden zu den drei Reaktionslösungen (A, B, C) je 3 Liter einer gesättigten Bariumacetatlösung sowie 10% des Gesamtvolumens an Alkohol gefügt. Nach Stehen über Nacht wurde zentrifugiert; aus den klaren Zentrifugaten wurden die Kohlenhydrat-mono-phosphorsäure-ester isoliert. Nach Reinigung über die Bleisalze, Rückverwandlung in die Bariumverbindungen und nach wiederholter Umfällung der Bariumsalze mit Alkohol betrugen die Ausbeuten an den löslichen Bariumsalzen der Kohlenhydrat-mono-phosphorsäure-ester aus den A-Versuchen 108,5 g, aus den B-Ansätzen 110,7 g und aus der C-Serie 178 g. Nach Trocknung im Hochvakuum bei 56°

über Phosphorpentoxyd wurden Bestimmungen des C-, H-, P-, Ba-Gehalts, der optischen Aktivität und des Reduktionsvermögens vorgenommen. Die Abtrennung des Aldose-phosphats gelang durch Oxydation mit Hypojodit; in dem hinterbliebenen Anteil kann der NEUBERG-ester dann durch Reduktion ermittelt werden, während sich der Gehalt an Trehalose-mono-phosphorsäure-ester durch enzymatische Spaltung mit Trehalase feststellen lässt. So kommt man zu einer befriedigenden Übersicht über die Zusammensetzung der aus Maltose hervorgehenden Phosphorylierungs-produkte.

A. Untersuchung des Barium-mono-phosphorsäure-esters, gewonnen mit frischer Hefe

4,738 mg Substanz gaben 3,650 mg CO₂ und 1,577 mg H₂O.

0,1696 g „ „ 0,0858 g BaSO₄.

0,1509 g „ „ 0,0706 g Ba₂P₂O₇.

Gef.: C=21,00%, H=3,69%, P=6,46%, Ba=29,76%.

0,5640 g Salz wurden in Wasser zu 10 ccm gelöst:

$\alpha = +2,60^\circ$, $l=1$. $[\alpha]_D^{25}$ Salz = $+46,10^\circ$.

0,2955 g Salz wurden mit 1,44 ccm n HCl zu 10 ccm gelöst:

$\alpha = +1,43^\circ$, $l=1$. $[\alpha]_D^{25}$ Säure = $+75,26^\circ$.

0,5640 g Bariumsalz ($1,1742 \cdot 10^{-3}$ Mol, bezogen auf den P-Gehalt) wurden mit der berechneten Menge Natriumsulfat umgesetzt und mit Wasser auf 100 ccm aufgefüllt. 20 ccm des klaren Filtrats dienten für die Analysen nach LEHMANN-MAQUENNE unter Benutzung der BERTRANDSchen Lösungen. Verbrauch 5,8 ccm n/10 Thiosulfat, äquivalent 36,9 mg Cu bzw. 18,37 mg Glucose. Die Reduktion von 0,5640 g Bariumsalz entsprach demnach der von 91,9 mg ($0,5105 \cdot 10^{-3}$ Mol) Glucose oder 43,5% der äquimolekularen Menge Hexose.

B. Untersuchung des Mono-phosphats, gewonnen mit Trockenhefe

4,601 mg Substanz : 3,690 mg CO₂ und 1,562 mg H₂O.

0,1886 g „ : 0,0910 g BaSO₄.

0,1409 g Substanz : 0,0630 g $\text{Ba}_2\text{P}_2\text{O}_7$.

Gef. : C=21,86%, H=3,77%, P=6,17%, Ba=28,38%.

0,4637 g Salz in Wasser zu 10 ccm gelöst :

$\alpha = +2,64^\circ$, $l=1$. $[\alpha]_D^{20}$ Salz = $+56,93^\circ$.

0,3065 g Salz mit 1,49 ccm n HCl zu 10 ccm gelöst :

$\alpha = +1,78^\circ$, $l=1$. $[\alpha]_D^{20}$ Säure = $+90,30^\circ$.

Die Reduktion von 0,4637 g Bariumsalz ($0,9226 \cdot 10^{-3}$ berechnet nach dem P-Gehalt) entsprach der von 59,65 mg ($0,3314 \cdot 10^{-3}$ Mol) Glucose, d. h. 35,9% der äquimolekularen Menge Hexose.

C. Untersuchung des Mono-phosphats, gewonnen mit Mazerationssaft

4,790 mg Substanz : 3,140 mg CO_2 und 1,408 mg H_2O .

0,1052 g „ : 0,0603 g BaSO_4 .

0,1600 g „ : 0,0880 g $\text{Ba}_2\text{P}_2\text{O}_7$.

Gef. : C=17,87%, H=3,26%, P=7,56%, Ba=33,72%.

0,5259 g Salz in Wasser zu 10 ccm gelöst :

$\alpha = +0,66^\circ$, $l=1$. $[\alpha]_D^{20}$ Salz = $+12,55^\circ$.

0,2964 g Salz mit 1,47 ccm n HCl zu 10 ccm gelöst :

$\alpha = +0,46^\circ$, $l=1$. $[\alpha]_D^{20}$ Säure = $+24,13^\circ$.

Die Reduktion von 0,5395 g Bariumsalz ($1,3161 \cdot 10^{-3}$ Mol berechnet nach dem P-Gehalt) entsprach der von 160,2 mg ($0,8899 \cdot 10^{-3}$ Mol) Glucose, d. h. 67.6% der äquimolekularen Menge Hexose.

Die Resultate der Analysen sowie die für Bariumhexose-mono-phosphat und trehalose-mono-phosphorsaures Barium berechneten Werte sind in Tabelle VII zusammengestellt.

Versucht man nach den gefundenen Zahlen für den Bariumgehalt, nach dem Drehungsvermögen der freien Säuren und nach den Bestimmungen des reduzierenden Zuckers das Mischungsverhältnis der Komponenten zu ermitteln, so findet man die in Tabelle VIII angeführten Werte.

Aus den Daten der Tabelle VII ist zu ersehen, dass der in den C-Versuchen innerhalb 2 Stunden mit Mazerationssaft aus Maltose

Tabelle VII.

	Berechnet				Gefunden		
	Hexose-mono-phosphorsaures Ba	Hexose-mono-phosphorsaures Ba + $\frac{1}{2}$ H ₂ O	Trehalose-mono-phosphorsaures Ba	Trehalose-mono-phosphorsaures Ba + 2H ₂ O	Präparat A (frische Hefe)	Präparat B (Trockenhefe)	Präparat C (Maze-rations-saft)
C %	18,20	17,80	25,83	24,26	21,00	21,86	17,87
H %	2,80	2,99	3,80	4,25	3,69	3,77	3,26
P %	7,84	7,67	5,56	5,22	6,46	6,17	7,56
Ba %	34,73	33,96	24,63	23,14	29,76	28,38	33,72
[α] _D Salz.		+12,5°		+112°	+46,1°	+56,93°	+12,55°
[α] _D Säure		+24,0°		+157°	+75,26°	+90,3°	+24,13°
Reduktionswert nach LEHMANN-MAQUENNE in % der äquimolekularen Menge Glucose, ...		etwa 66%		0	43,5%	35,9%	67,6%

gebildete Mono-phosphorsäure-ester „reiner“ ROBISON-Ester war. Die Angaben der Tabelle VIII lehren, dass nach 7-stündiger Gärung von Maltose mit Trockenhefe und nach 11-stündiger Einwirkung von toluolisierter frischer Hefe auf das gleiche Disaccharid Gemische von

Tabelle VIII.

	Prozentuale Zusammensetzung von Präparat A, bereitet mit frischer Hefe, berechnet nach			Prozentuale Zusammensetzung von Präparat B, bereitet mit Trockenhefe, berechnet nach		
	Ba	[α] _D	reduzierendem Zucker	Ba	[α] _D	reduzierendem Zucker
Hexose-ester	61,1	61,5	55,5	48,4	50,2	43,8
Gehalt an Trehalose-ester	38,9	38,5	44,5	51,6	49,8	56,2

Hexose-mono-phosphorsäure-ester und Trehalose-mono-phosphorsäure-ester entstanden waren.

Zur weiteren Identifizierung dieser Gemische wurde der ROBISON-Ester durch Oxydation mit Hypojodit entfernt: im Rückstande (s. unten) wurde das reduzierende Zucker-phosphat bestimmt, das als NEUBERG-Ester anzusprechen ist, und schliesslich wurde der Trehalose-ester durch Trehalase gespalten.

*D. Entfernung des Robison-esters aus den A- und B-Präparaten
mit der zur Oxydation von Aldosen empfohlenen
Methodik⁽¹⁸⁾*

49 g Bariumjodid + 25 g Jod wurden in 660 ccm Wasser gelöst. In je 650 ccm dieser Jodlösung wurden je 15 g Ester gelöst und innerhalb von 3 Minuten 700 ccm 0,4 n Ba(OH)₂ unter Rührung zugefügt. Sodann wurde sofort mit CO₂ gegen Phenolphthalein neutralisiert, im Vakuum bei 30° eingengt und zentrifugiert. Das Zentrifugat wurde mit 10% des Gesamtvolumens an Alkohol versetzt und nach 1 Stunde filtriert. Aus der Lösung wurden durch Zusatz von 75% des Gesamtvolumens an Alkohol die Bariumsalze der unveränderten Ester niedergeschlagen, abgesaugt und erst mit 75%igem, darauf mit absolutem Alkohol gewaschen. Die Niederschläge wurden viermal aus wässriger Lösung mit Alkohol umgefällt und dann im Exsikkator über Phosphor-pentoxyd getrocknet. Die Ausbeuten betrugen aus 15 g Präparat A: 5,2 g, aus 15 g Präparat B: 5,5 g Gemisch von NEUBERG-Ester plus Trehalose-ester.

E. Untersuchung der Gemische von Neuberg-Ester und trehalose-mono-phosphorsaurem Barium

Zur Bestimmung des Gehalts an NEUBERG-Ester in den Gemischen mit Trehalose-mono-phosphat wurden die Reduktionswerte nach LEHMANN-MAQUENNE ermittelt und daraus die Mengen der vorhandenen Estersäure berechnet. Die analytischen Befunde sind in Tabelle IX zusammengestellt. Der Gehalt an fructose-mono-phosphorsaurem Barium war in beiden Fällen mässig, jedoch in dem mit frischer Hefe

Tabelle IX.

Substanz g	In 100 ccm			% Bariumsalz des NEUBERG-Esters im Gemisch von NEU- BERG-Ester und Trehalose-phosphat
	reduzierender Zucker (Fructose) mg	Fructose im NEUBERG- Ester* mg	Bariumsalz des NEUBERG-Esters mg	
A. 0,9223	41,60	60,3	141,57	15,34
B. 0,9435	31,00	46,9	105,39	11,16

* Bei der Annahme, dass die Reduktion des NEUBERG-Esters nach LEHMANN-MAQUENNE wie die des ROBISON-Esters 66% der äquivalenten Menge Glucose beträgt.

dargestellten Präparat A höher als in dem durch Phosphorylierung mit Trockenhefe gewonnenen Präparat B.

Das Trehalose-mono-phosphat wurde mit einem nach H. PRINGSHEIM und D. KRÜGER⁽¹⁷⁾ bereiteten Trehalasepräparat aus *Aspergillus niger* hydrolysiert und der in den Reaktionsgemischen nach der Einwirkung des Ferments vorhandene reduzierende Zucker festgestellt. Durch Abzug der aus dem NEUBERG-ester phosphatatisch frei gewordenen Hexose von dem gesamt-reduzierenden Zucker ergab sich die aus Trehalosephosphat entstandene Glucose und daraus die Menge an trehalose-phosphorsaurem Barium.

Zur Kontrolle wurden auch Bestimmungen des durch das Fermentpräparat abgespaltenen Phosphors vorgenommen. Durch Subtraktion des P aus dem NEUBERG-Ester von dem insgesamt in anorganische Bindung übergeführten Phosphor wurde der vom Trehalose-phosphat abgegebene P und daraus der Gehalt an trehalose-phosphorsaurem Barium berechnet. Tabelle X enthält die gefundenen Werte.

Die für die Versuche der Tabelle X angestellten Ansätze hatten folgende Zusammensetzung:

1. 0,9223 g Substanz A (Gemisch von NEUBERG-Ester und Trehalose-mono-phosphat),

50 ccm m/5 Essigsäure-Acetat-Puffer von pH 5,3,

50 ccm Wasser,

0,5 g Trehalasepräparat,

2 ccm Toluol.

2. 0,9435 g Substanz B (Gemisch von NEUBERG-Ester und Trehalose-mono-phosphat),

50 ccm m/5 Essigsäure-Acetat-Puffer von pH 5,3,

50 ccm Wasser,

0,5 g Trehalasepräparat,

2 ccm Toluol.

3. Wie 1. } , jedoch statt Wasser weitere 50 ccm Essigsäure-

4. Wie 2. } Acetat-Puffer.

Bestimmungen des reduzierenden Zuckers und des anorganischen Phosphors in entsprechenden Kontrollversuchen mit Substrat ohne Ferment, bzw. mit Ferment ohne Substrat zeigten, dass in diesen Ansätzen weder eine Bildung reduzierenden Zuckers noch eine Phosphatabspaltung vor sich ging.

Tabelle X. (a)

Versuch Nr.	Spaltungszeit Std.	mg in 100 ccm			% trehalose-mono- phosphorsaures Barium + 2H ₂ O im Gemisch, ber. aus abgespaltenem Zucker
		Hexose nach der Reduktions- bestimmung	Glucose nach Abzug der Fructose des NEUBERG- Esters*	trehalose- monophos- phorsaures Barium + 2H ₂ O	
1	5	168,5	105,5	173,96	18,86
	10	262,0	199,0	328,13	35,58
	25	442,5	379,5	625,76	67,85
2	5	158,0	111,1	183,19	19,42
	10	272,0	225,1	371,17	39,34
	25	475,0	428,1	705,89	74,82
3	5	179,2	116,2	191,60	20,77
	15	380,0	317,0	522,70	56,67
	40	453,5	390,5	643,90	69,79
4	5	179,2	132,3	218,15	23,12
	15	421,2	374,3	617,18	65,41
	40	475,0	428,1	705,89	74,82

Tabelle X. (b)

Versuch Nr.	Spaltungszeit Std.	mg in 100 ccm			% trehalose-mono-phosphorsaures Barium, ber. aus der P-Abspaltung
		gesamtabgespaltener Phosphor	aus Trehalose-ester abgespaltener Phosphor*	trehalose-mono-phosphorsaures Barium + 2H ₂ O	
1	5	36,80	25,94	496,93	53,88
	10	42,05	31,19	597,51	64,78
	25	33,37	22,51	431,22	46,75
2	5	36,79	28,71	550,00	58,29
	10	42,05	33,97	650,76	68,97
	25	27,80	19,72	377,78	40,04
3	5	42,41	31,55	604,40	65,53
	15	42,05	31,19	597,51	64,78
	40	37,07	26,21	502,10	54,44
4	5	40,35	32,27	618,20	65,52
	15	42,04	33,96	650,57	68,95
	40	31,28	23,20	444,44	47,11

* Unter der Annahme, dass die Phosphorsäure des NEUBERG-Esters nach 5 Stunden bereits vollständig abgespalten ist.

IV. VERGLEICHENDE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE BIOCHEMISCHE BILDUNG VON OPTISCH AKTIVER PHOSPHOGLYCERINSÄURE AUS MALTOSE UND VERSCHIEDENEN ZUCKERN

1. Vorversuche mit verschiedenen Mengen Phosphat, Maltose und Acetaldehyd

- 100 ccm $\frac{2}{3}$ mol. Phosphatlösung von pH 6,6,
20 „ 28,5%ige Maltoselösung¹,

1. Hier wie in allen übrigen Fällen auf das wasserfreie Disaccharid berechnet, und zwar aus der spezifischen Drehung.

- 100 ccm 2,93%ige Acetaldehydlösung,
 80 „ 3%ige Natrium-hexose-di-phosphatlösung,
 10 „ mol. Natriumfluoridlösung,
 40 g frische Patzenhofer Hefe,
 50 ccm Wasser,
 20 „ Toluol.
2. Wie 1., aber 100 ccm $\frac{1}{3}$ mol. Phosphatlösung von pH 6,6.
3. 100 ccm $\frac{1}{3}$ mol. Phosphatlösung von pH 6,6,
 40 „ 28,5%ige Maltoselösung,
 100 „ 2,93%ige Acetaldehydlösung,
 80 „ 3%ige Natrium-hexose-di-phosphatlösung,
 10 „ mol. Natriumfluoridlösung,
 40 g frische Patzenhofer Hefe,
 30 ccm Wasser,
 20 „ Toluol.
4. Wie 1., aber 100 ccm $\frac{1}{3}$ mol. Phosphatlösung von pH 6,6 und
 100 ccm 1,46%ige Acetaldehydlösung.

Alle Ansätze wurden $3\frac{1}{2}$ Stunden bei 37° digeriert. Phosphorbestimmungen zu Beginn und am Ende der Versuche sowie Isolierung der Phosphoglycerinsäure aus je 300 ccm Versuchsgemisch erfolgten in der von NEUBERG und KOBEL⁽¹⁹⁾ angegebenen Weise. Die Mengen des pro Kubikzentimeter Versuchslösung in organische Bindung übergeführten Phosphors und die Ausbeuten an kristallisiertem sauren Bariumsalz der Phosphoglycerinsäure sind jeweils in den Tabellen verzeichnet.

Tabelle XI.

Versuch Nr.	mg organisch gebundener P pro ccm	g saures Ba-Salz der Phosphogly- cerinsäure aus je 300 ccm Ver- suchsgemischen
1	2,17	4,15
2	1,57	3,40
3	1,58	3,39
4	1,65	3,63

2. Vorversuche mit Maltose und mit Rohrzucker bei verschiedenen Hexose-di-phosphatmengen

1. 50 ccm $\frac{2}{3}$ mol. Phosphatlösung von pH 6,6,
 20 „ 28,5%ige Maltoselösung,
 100 „ 2,98%ige Acetaldehydlösung,
 20 „ 12% ige Kalium-hexose-di-phosphatlösung,
 10 „ mol. Natriumfluoridlösung,
 40 g frische Patzenhofer Hefe,
 160 ccm Wasser,
 20 „ Toluol
 2. Wie 1., aber 20 ccm 6%ige Kalium-hexose-di-phosphatlösung.
 3. Wie 1., aber 20 ccm 3%ige Kalium-hexose-di-phosphatlösung.
 4. Wie 1.,
 5. Wie 2.,
 6. Wie 3.,
- } , aber statt 28,5%iger Maltoselösung 28,5%ige Rohrzuckerlösung.
- Versuchsdauer: $3\frac{1}{2}$ Stunden bei 37° .

Tabelle XII.

Versuch Nr.	mg organisch gebundener P pro ccm	g saures Ba-Salz der Phosphoglycerinsäure aus je 300 ccm Versuchsgemischen
1	1,43	3,10
2	1,28	2,69
3	1,16	2,14
4	1,28	3,07
5	1,10	2,68
6	1,02	2,05

3. Vergleichende Versuche über die Bildung von Phosphoglycerinsäure aus Rohrzucker, Maltose, Glucose und Fructose durch Hefen-mazerationssaft

1. 200 ccm Hefen-mazerationssaft,
 10 „ Natriumfluoridlösung,

- 55 ccm $\frac{2}{3}$ mol. Phosphatlösung von pH 6,6,
 20 „ 25%ige Rohrzuckerlösung,
 15 „ 12%ige Kalium-hexose-di-phosphatlösung,
 100 „ 2%ige Acetaldehydlösung.
2. Wie 1., aber statt 25%iger Rohrzuckerlösung 25%ige Maltose-
 lösung.
 3. Wie 1., aber statt 25%iger Rohrzuckerlösung 26,3%ige Glu-
 coselösung.
 4. Wie 1., aber statt 25%iger Rohrzuckerlösung 26,3%ige
 Fructoselösung.
- Versuchsdauer: $3\frac{1}{2}$ Stunden bei 37°.

Tabelle XIII.

Versuch Nr.	mg organisch gebundener P pro ccm	g saures Ba-Salz der Phosphogly- cerinsäure aus je 300 ccm Ver- suchsgemischen
1	2,05	4,54
2	2,02	5,23
3	2,04	4,59
4	1,98	4,70

*4. Vergleichende Versuche über die Phosphoglycerinsäurebildung aus
 Rohrzucker, Maltose, Glucose und Fructose durch frische
 Hefe in Gegenwart von Toluol*

1. 100 ccm $\frac{2}{3}$ mol. Phosphatlösung von pH 6,6,
 20 „ 25%ige Rohrzuckerlösung,
 100 „ 2%ige Acetaldehydlösung,
 15 „ 12%ige Kalium-hexose-di-phosphatlösung,
 10 „ mol. Natriumfluoridlösung,
 40 g frische Patzenhofer Hefe,
 115 ccm Wasser,
 20 „ Toluol.
2. Wie 1., aber statt 25%iger Rohrzuckerlösung 25%ige Maltose-
 lösung.

3. Wie 1., aber statt 25%iger Rohrzuckerlösung 26,3%ige Glucoselösung.
4. Wie 1., aber statt 25%iger Rohrzuckerlösung 26,3%ige Fructoselösung.

Versuchsdauer : $3\frac{1}{2}$ Stunden bei 37°.

Tabelle XIV.

Versuch Nr.	mg organisch gebundener P pro ccm	g saures Ba-Salz der Phosphoglycerinsäure aus je 300 ccm Versuchsgemischen
1	1,26	2,55
2	1,39	2,66
3	1,23	2,40
4	1,34	2,40

Das aus Maltose gewonnene saure Bariumsalz der Phosphoglycerinsäure wurde vorschriftsgemäss umkristallisiert; es war nach Drehung und Analyse rein.

V. UNTERSUCHUNGEN ÜBER DEN ABBAU DES AUS MALTOSE GEBILDETEN HEXOSE-DI-PHOSPHATS DURCH EIN ENZYM DER TABAKBLÄTTER

1. *Versuche mit Saft frischer Tabakblätter (Basma serie Zigaretten-
tabak und Geudertheimer Zigarrentabak) bei verschiedenen
Konzentrationen an Hexose-di-phosphat.*

Zusammensetzung der Ansätze (Tabelle XV und XVI).

1. 20 ccm 9,84- oder 4,92- bzw. 2,46%ige Kalium-hexose-di-phosphatlösung,
10 ccm Tabaksaft¹,
10 „ Wasser,
0,5 ccm Toluol.

1. Bereitet durch Auspressen der in einer Zerkleinerungsmaschine fein zerteilten frisch gepflückten Tabakblätter.

2. 20 ccm 9,84- oder 4,92- bzw. 2,46% ige Kalium-hexose-di-phosphatlösung,
 5 ccm Tabaksaft,
 15 „ Wasser,
 0,5 ccm Toluol.

Versuchstemperatur 20°.

Nach den in den Tabellen XV und XVI angegebenen Zeiten wurden

Tabelle XV. (a)
 Saft von Zigarettentabakblättern.

Versuch Nr.	Versuchs- dauer Std.	Saft von Zigarettentabakblättern in 40 ccm Reaktionsgemisch ccm	Konzentration an Kalium-hexose-di-phosphat 4,92%	
			Methylglyoxal-bis-dinitrophenylhydrazon aus 10 ccm Versuchslösung mg	Ausgangsmaterial übergegangen in Triose bzw. Triosephosphorsäure %
1	3	10	19,2	2,2
2		5	17,2	2,0
1	6	10	—	—
2		5	—	—
1	19	10	20,0	2,3
2		5	23,4	2,7
1	25	10	16,8	1,9
2		5	20,8	2,4

Tabelle XV. (b)
 Saft von Zigarettentabakblättern.

Versuch Nr.	Versuchs- dauer Std.	Saft von Zigarettentabakblättern in 40 ccm Reaktionsgemisch ccm	Konzentration an Kalium-hexose-di-phosphat 2,46%	
			Methylglyoxal-bis-dinitrophenylhydrazon aus 10 ccm Versuchslösung mg	Ausgangsmaterial übergegangen in Triose bzw. Triosephosphorsäure %
1	3	10	8,0	1,9
2		5	9,5	2,2
1	6	10	14,5	3,4
2		5	15,7	3,6
1	19	10	14,2	3,3
2		5	18,1	4,2
1	25	10	7,5	1,7
2		5	16,0	3,7

Tabelle XV. (c)
Saft von Zigarettentabakblättern.

Versuch Nr.	Versuchs- dauer Std.	Saft von Zigarettentabakblättern in 40 ccm Reaktionsgemisch ccm	Konzentration an Kalium-hexose-diphosphat 1,23%	
			Methylglyoxal-bis-dinitrophenylhydrazon aus 10 ccm Versuchslösung mg	Ausgangsmaterial übergegangen in Triose bzw. Triosephosphorsäure %
1	3	10	4,5	2,1
2		5	7,8	3,6
1	6	10	7,5	3,5
2		5	12,2	5,7
1	19	10	9,5	4,4
2		5	13,7	6,4
1	25	10	3,9	1,8
2		5	8,4	3,9

die Versuche durch Zugabe von je 10 ccm 20%iger Trichloressigsäure zu jedem Ansatz unterbrochen. In den klar filtrierten Lösungen wurden dann die Triosebestimmungen in der zuletzt⁽¹⁹⁾ beschriebenen Ausführungsform des Destillationsverfahrens vorgenommen. Die Mengen des nach Destillation der Versuchsflüssigkeiten mit Schwefelsäure im Destillat gefällten Methylglyoxal-bis-2, 4-dinitro-phenylhydrazons sowie die daraus berechneten Triose-ausbeuten sind den Tabellen XV und XVI zu entnehmen.

Die ursprünglichen Reaktionsgemische dieser wie auch der später angegebenen Versuche enthielten kein Methylglyoxal; der Ketonaldehyd

Tabelle XVI. (a)
Saft von Zigarrentabakblättern.

Versuch Nr.	Versuchs- dauer Std.	Saft von Zigarrentabakblättern in 40 ccm Reaktionsgemisch ccm	Konzentration an Kalium-hexose-diphosphat 4,92%	
			Methylglyoxal-bis-dinitrophenylhydrazon aus 10 ccm Versuchslösung mg	Ausgangsmaterial übergegangen in Triose bzw. Triosephosphorsäure %
1	6	10	16,0	1,8
2		5	14,3	1,7
1	20	10	17,5	2,0
2		5	20,8	2,4

entstand erst aus seiner Vorstufe der 3-Kohlenstoffreihe durch die Behandlung mit der Schwefelsäure.

Tabelle XVI. (b)
Saft von Zigarrentabakblättern.

Versuch Nr.	Versuchs- dauer Std.	Saft von Zigarren- tabakblättern in 40 ccm Reaktions- gemisch ccm	Konzentration an Kalium-hexose-di- phosphat 2,46%	
			Methylglyoxal-bis-di- nitrophenylhydrazon aus 10 ccm Versuchslösung mg	Ausgangsmaterial übergegangen in Triose bzw. Triose- phosphorsäure %
1	6	10	13,2	3,1
2		5	13,0	3,0
1	20	10	17,0	3,9
2		5	13,7	3,2

Tabelle XVI. (c)
Saft von Zigarrentabakblättern.

Versuch Nr.	Versuchs- dauer Std.	Saft von Zigarren- tabakblättern in 40 ccm Reaktions- gemisch ccm	Konzentration an Kalium-hexose-di- phosphat 1,23%	
			Methylglyoxal-bis-di- nitrophenylhydrazon aus 10 ccm Versuchslösung mg	Ausgangsmaterial übergegangen in Triose bzw. Triose- phosphorsäure %
1	6	10	10,4	4,8
2		5	9,3	4,3
1	20	10	12,2	5,7
2		5	12,5	5,8

Die Ansätze der 3. Versuchsreihe mit stärker verdünnter Hexose-di-phosphatlösung (Tabelle XVII) hatten folgende Zusammensetzung:

- 20 ccm 1,38- bzw. 0,69% ige Kalium-hexose-di-phosphatlösung,
5 „ Saft von Zigaretentabakblättern (Basma seris),
15 „ Wasser,
0,5 ccm Toluol.
- 20 ccm 1,38- bzw. 0,69% ige Kalium-hexose-di-phosphatlösung,
2 „ Saft,
18 „ Wasser,
0,5 ccm Toluol.

Versuchstemperatur und Aufarbeitung wie vorher angegeben ; Resultate in Tabelle XVII.

Tabelle XVII. (a)
Saft von Zigarettenabakblättern.

Versuch Nr.	Versuchs- dauer Std.	Saft von Zigaretten- tabakblättern in 40 ccm Reaktions- gemisch ccm	Konzentration an Kalium-hexose-di- phosphat 0,69%	
			Methylglyoxal-bis-di- nitrophenylhydrazon aus 10 ccm Versuchslösung mg	Ausgangsmaterial übergegangen in Triose bzw. Triose- phosphorsäure %
1	16	5	4,7	3,9
2		2	9,4	7,8
1	20	5	6,4	5,3
2		2	10,4	8,6
1	24	5	6,1	5,0
2		2	10,8	8,9

Tabelle XVII. (b)
Saft von Zigarettenabakblättern.

Versuch Nr.	Versuchs- dauer Std.	Saft von Zigaretten- tabakblättern in 40 ccm Reaktions- gemisch ccm	Konzentration an Kalium-hexose-di- phosphat 0,34%	
			Methylglyoxal-bis-di- nitrophenylhydrazon aus 10 ccm Versuchslösung mg	Ausgangsmaterial übergegangen in Triose bzw. Triose- phosphorsäure %
1	16	5	1,1	1,8
2		2	3,7	6,1
1	20	5	1,0	1,7
2		2	4,2	6,9
1	24	5	0,5	0,8
2		2	3,7	6,1

2. Versuche mit dachtrocknem¹ Zigarettenabak (Basma seris).

Zusammensetzung der Ansätze.

1. 40 ccm 1,38%ige Kalium-hexose-di-phosphatlösung,
0,5 g fein gemahlener trockener Tabak,

1. Etwa 1 Monat alt.

0,5 ccm Toluol.

2. Wie 1., jedoch statt 0,5 g Tabak 1,0 g.

3. Wie 1., jedoch statt 0,5 g Tabak 1,5 g,

Versuchstemperatur 20°, Unterbrechung der Enzymwirkung nach den in Tabelle XVIII angegebenen Zeiten durch Zugabe von je 10 ccm 20%iger Trichloressigsäure. Zusammenfassung der Ergebnisse in Tabelle XVIII.

Tabelle XVIII.

Konzentration an Kalium-hexose-di-phosphat 1,38%.

Versuch Nr.	Versuchs- dauer Std.	Trockenpräparat von Zigarettenabak in 40 ccm Reaktionsgemisch g	Methylglyoxal-bis- di-nitrophenyl- hydrazon aus 10 ccm Versuchslösung mg	Ausgangsmaterial übergegangen in Triose bzw. Triose- phosphorsäure %
1	20	0,5	4,3	1,8
2		1,0	5,2	2,1
3		1,5	6,0	2,5
1	28	0,5	5,4	2,2
2		1,0	7,5	3,1
3		1,5	8,7	3,6
1	44	0,5	5,8	2,4
2		1,0	7,4	3,1
3		1,5	6,7	2,8
1	54	0,5	4,1	1,7
2		1,0	4,8	2,0
3		1,5	4,6	1,9

3. Versuche mit Alkohol-Äther-präparat¹ von Geudertheimer Zigarrentabak

Zusammensetzung und Aufarbeitung der Ansätze wie bei denen mit dachtrockenem Tabak. Resultate in Tabelle XIX.

1. Frischer Brei von Tabakblättern wurde in die achtfache Menge eines Gemisches von 3 Teilen abs. Alkohol und 1 Teil Äther eingetragen und damit verrührt. Nach dem Absaugen wurde das Material nochmals mit der dreifachen Menge—berechnet auf den ursprünglich verwendeten Blätterbrei—des gleichen Alkohol-Äther-gemisches verrieben, abgesaugt, mit Äther gewaschen und im Exsikkator über Paraffin nebst Chlorcalcium getrocknet.

Tabelle XIX.

Konzentration an Kalium-hexose-di-phosphat 1,38%.

Versuch Nr.	Versuchs- dauer Std.	Alkohol- Äther-präparat von Tabak in 40 ccm Reaktionsgemisch g	Methylglyoxal-bis- di-nitrophenyl- hydrazon aus 10 ccm Versuchslösung mg	Ausgangsmaterial übergegangen in Triose bzw. Triose- phosphorsäure %
1	44	0,5	1,0	0,4
2		1,0	1,7	0,7
3		1,5	1,5	0,6
1	54	0,5	0,3	0,1
2		1,0	0,8	0,3
3		1,5	0,3	0,1

Das aus den Destillaten isolierte Methylglyoxal-bis-2, 4-di-nitrophenylhydrazon wurde aus Nitrobenzol umkristallisiert und durch Schmelzpunkt ($=298^{\circ}$) sowie Stickstoffanalyse identifiziert.

VI. ERÖRTERUNG UND ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit werden neue Beobachtungen zur Vergärung der Maltose mitgeteilt. Der Di-phosphorsäure-ester dürfte in allen Fällen als Zymo-di-phosphat zu betrachten sein. Bei der Schwerlöslichkeit des betreffenden Bariumsalzes scheint eine Beimengung von Triose-mono-phosphat als wenig wahrscheinlich. Bei dem Mono-phosphorsäure-ester handelt es sich um Gemische wechselnder Zusammensetzung. Immer überwog erheblich der 6-Glucose-mono-phosphorsäure-ester (ROBISON-ester); bei Saft lag die nach 2 Stunden abgeschiedene Monophosphat-fraktion als praktisch reiner ROBISON-ester vor. Die Tatsache, dass hier in der Periode der raschesten Veresterung die Bildung des ROBISON-esters derjenigen des HARDEN-YOUNG-esters vorangeht spricht dafür, dass der ROBISON-ester ein Zwischenprodukt bei der Bildung der Hexose-di-phosphorsäure aus Maltose mittels Mazerationssaft sei. (Siehe Abb. 3). Bei Verwendung von frischer Hefe und Trockenhefe als phosphorylierenden Agenzien bestand die Mono-phosphat-fraktion aus Gemischen; sie enthielten neben viel ROBISON-ester in grosser Menge Trehalose-ester und wenig

NEUBERG-ester. (ROBISON-ester ist die konventionelle Benennung des nicht besonders getrennten Anteils an Hexose-mono-phosphat, in dem die Glucosekomponente überwiegt; NEUBERG-ester ist die Bezeichnung für das Derivat, in dem das Fructose-monophosphat vorherrscht, während Trehalose-mono-phosphat den nicht reduzierenden Ester darstellt.)

Während in den Ansätzen mit Trockenhefe und Mazerationssaft die Phosphorylierung etwa parallel der Gärung einsetzt, beginnt in den Versuchen mit frischer Hefe die CO_2 -Entwicklung früher als die Phosphat-veresterung. Im Zusammenhange mit den Befunden VEIBELS⁽²¹⁾ bei der Phosphorylierung von Traubenzucker durch frische Hefe ergibt sich folgendes: VEIBEL hat bei der Glucose-veresterung nur während der ersten 8 Stunden die Anwesenheit von mehr Di-phosphat als Mono-phosphat festgestellt, während der übrigen Versuchszeit von 8 bis 32 Stunden war die Mono-phosphat-fraktion beträchtlich grösser als der Di-phosphatanteil. Bei der Phosphorylierung von Maltose mit frischer Hefe übertraf ausnahmslos die Ausbeute an Di-phosphat die an Mono-phosphat (siehe S. 7).

In ihrer Gesamtheit lehren meine Versuche, dass die Maltose sich bei Phosphorylierung anders als Traubenzucker verhält. Weiter ergibt sich, dass man für eine Kennzeichnung des Phosphorylierungs-vermögens scharf zu unterscheiden hat zwischen den drei gewöhnlich angewandten Hefezubereitungen, nämlich zwischen frischen Pilzen in Gegenwart von Toluol, zwischen Trockenhefen und zwischen Mazerationssäften.

Es ist mehrfach angegeben, dass es eine Phosphorylierung gibt, die unabhängig von der Gärung verläuft⁽²¹⁾. In den Versuchen mit Maltose habe ich dieses Phänomen nicht beobachtet, wenigstens trat bei Verwendung von frischer Hefe unter Toluol-zugabe starke Kohlendioxydentwicklung schon innerhalb der ersten Stunde zutage, während zu dieser Zeit eine Phosphorylierung noch nicht oder nur in Spuren bemerkbar war.

Da nun die Entstehung von Phosphoglycerinsäure unter dem Einfluss von Fluorid in Parallele zu den Effekten der bekannten

Abfangverfahren zu setzen ist, so schliesst sich die Maltose⁽²²⁾ bei dieser Behandlung den Monosacchariden an⁽²²⁾. Es erwies sich sogar, dass die Maltose in keiner Weise hinter den Monosacchariden hinsichtlich ihrer Fähigkeit zur Phosphoglycerinsäurebildung zurücksteht, sofern man äquimolare Mengen von C₆-Einheiten vergleicht; es zeigt sich, dass sie mindestens ein ebenso brauchbares Substrat wie die übrigen Zucker ist.

Schon früher haben NEUBERG, KOBEL und SCHEUER⁽²²⁾⁽¹¹⁾ festgestellt, dass Tabakblätter Acetaldehyd sowie Methylglyoxal hervorbringen, und dieselben Autoren haben ferner gezeigt, dass Hexose-diphosphorsäure dephosphoryliert werden kann, wobei unter geeigneten Bedingungen Methylglyoxal auftritt.

Vergrössert man in solchen Ansätzen, für die das durch Art der Zubereitung von Co-Ferment befreite oder daran verarmte Enzym (Apozymase) verwendet war, das Verhältnis von Ferment zu Substrat, so gelingt es als Methylglyoxal-vorstufe die Triose zu fassen. Da ich dieselbe nicht als solche isoliert, sondern durch die bekannte Überführbarkeit in Methylglyoxal bei Destillation mit Schwefelsäure nachgewiesen habe, so lässt sich nicht mit Sicherheit sagen, ob freier 3-Kohlenstoffzucker oder dessen Phosphorsäure-ester entstanden war, doch hat die letzte Möglichkeit die grössere Wahrscheinlichkeit für sich. Freies Methylglyoxal war bei der gewählten Versuchsanordnung nicht aufzufinden. Die besten Resultate erzielte ich mit dem Saft aus frischen Blättern von Zigarettentabak; auch an der Luft getrocknete Blätter enthielten noch das wirksame-Enzym, während ich mit Alkohol-Äther-präparaten, die aus den frischen Blättern gleich nach dem Pflücken hergestellt waren, nur minimale Ausbeuten erreichte.

Aus den vorstehend mitgeteilten Beobachtungen wird man vorläufig keine vollständige Verknüpfung der verschiedenen Intermediärprodukte für die Maltosegärung finden können. Dies wird man der Zukunft überlassen müssen.

1. Bei der Phosphorylierung von Maltose wurden Hexose-diphosphorsäure-ester, ROBISON-ester, NEUBERG-ester und Trehalose-mono-phosphorsäure-ester nachgewiesen. Ausserdem

liefert Maltose unter anderen Bedingungen leicht lävogyre Phosphoglycerinsäure.

2. Es bestehen wesentliche Unterschiede bei Anwendung der drei verschiedenen Phosphorylierungs-agenzien, und zudem offenbaren sich bemerkenswerte Abweichungen im Verhalten von Maltose im Vergleich zu dem von Traubenzucker.
3. In Ansätzen mit frischer Hefe war während der ganzen Versuchsdauer wesentlich mehr Di-phosphat als Mono-phosphat vorhanden. (Siehe Abb. 1).
4. In Versuchen mit Trockenhefe wurde bis zu 20stündiger Versuchsdauer stets etwas mehr Di-phosphat als Mono-phosphat gefunden; die Mono-phosphat-menge blieb hier von der 11. Stunde an praktisch konstant, während der Di-phosphat-gehalt abnahm und schliesslich kleiner wurde als die Konzentration an Mono-phosphat. (Siehe Abb. 2).
5. Anders liegen die Verhältnisse für Mazerationssaft. (Siehe Abb. 3). Hier ist in den ersten Stunden wesentlich mehr Mono-phosphat zugegen. Nach $1\frac{1}{2}$ Stunden ist das Maximum der Phosphorylierung und der Kohlendioxyd-entwicklung erreicht. Zu dieser Zeit ist nur sehr wenig Di-phosphat anwesend und eine rund sechsmal grössere Quantität Mono-phosphat und zwar praktisch reiner ROBISON-ester; später liegt die Mono-phosphat-kurve nur wenig über der des Di-phosphats. Daraus kann man annehmen, dass der ROBISON-ester ein Zwischenprodukt bei der Bildung der Hexose-di-phosphorsäure aus Maltose durch Mazerationssaft sei.
6. Ein höherer Phosphatgehalt steigerte die Ausbeute an Phosphoglycerinsäure. (Siehe Tabelle XI).
7. Mit fallenden Mengen Hexose-di-phosphat sank die Ausbeute an phosphoglycerinsaurem Salz. (Siehe Tabelle XII).
8. Die Ausbeute an Phosphoglycerinsäure war mit Maltose etwas grösser als mit den anderen Kohlenhydraten. (Siehe Tabelle XIII).
9. Die absolut grössten Mengen an lävogyrer Phosphoglycerin-

säure wurden aus Maltose bei Benutzung von Hefenmazerationssaft als Enzymmaterial erhalten.

10. Es zeigte sich, dass auch grüne Pflanzen den Übergang von C_6 -Zucker in C_3 -Zucker bewirken.

LITERATUR

- (1) NEUBERG, C., Woch. Brau. 46: I, 1929.
- (2) Lit. bei KOBEL, M. u. NEUBERG, C., in KLEIN, G., Handbuch der Pflanzenanalyse, Bd. II, S. 553, 1932.
- (3) NEUBERG, I. St. u. OSTENDORF, Cl., Biochem. Z. 221: 154, 1930.
- (4) ROBISON, R., Biochem. Journ. 26: 2191, 1932.
- (5) NILSSON, R., Ark. f. Kem., Mineralogi och Geologi 10 [A], 50, 1930.
- (6) WILLSTÄTTER, R. u. STEIBELT, W., H. 115: 211, 1921.
- (7) HVISTENDAHL, B., Zeitschr. f. angew. Chem. 46: 835, 1933.
- (8) NEUBERG, C. u. KOBEL, M., Biochem. Z. 264: 456, 1933; Zeitschr. f. angew. Chem. 46: 711, 1933.
- (9) HARDEN A., Alcoholic fermentation, S. 124 u. 136, 1932.
- (10) MEYERHOF, O., Die chemische Vorgänge im Muskel, S. 124 u. 144, 1930.
- (11) BARRENSCHEEN, H. K. u. PANY, J., Biocnem. Z. 219: 364, 1930; KOBEL, M. u. SCHEUER, M., ebenda 216: 216, 1929.
- (12) MEYERHOF, O. u. LOHMANN, K., Naturwiss. 22: 134, 220, 1934; Biochem. Z. 271: 89, 1934; 273: 73, 1934.
- (13) KOBEL, M. u. NEUBERG, C., Biochem. Z. 269: 441, 1934.
- (14) NEUBERG, C. u. KOBEL, M., ebenda 272: 445, 1934.
- (15) Dieselben in OPPENHEIMER: „Die Fermente und ihre Wirkungen,“ Bd. III, 413, 1929.
- (16) GOEBEL, W. F., J. biol. Chem. 72: 809, 1927.
- (17) PRINGSHEIM, H. u. KRÜGER, D., KLEINS Handb. d. Pflanzenanalyse II, 841, 1932.
- (18) NEUBERG, C. u. KOBEL, M., Biochem. Z. 263: 219, 1933.
- (19) KOBEL, M. u. NEUBERG, C., ebenda 269: 444, 1934.
- (20) VEIBEL, St., ebenda 239: 350, 1931.
- (21) EULER, H. V. u. MYRBÄCK, K., KLUYVER, A. J. u. STRUYK, A. P., MEYERHOF, O., Lit. s. bei LOHMANN, K. in OPPENHEIMERS Handbuch der Biochemie, Ergänzungsband S. 147, 1930.
- (22) NEUBERG, C., HIRSCH, J. u. REINFURTH, E., Biochem. Z. 105: 303, 1920; RONA, E., ebenda 109: 288, 1920; NAGAI, K., ebenda 141: 261, 1923.
- (23) NEUBERG, C. u. KOBEL, M., ebenda 179: 459, 1926.

I.A.R.I. 75

INDIAN AGRICULTURAL RESEARCH
INSTITUTE LIBRARY, NEW DELHI.

[illegible]